MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

35. BAND. 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 2. APRIL 1932)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 56,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

35. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Boerner, H., Über einige Variationsprobleme 161

Geppert, M.-P., Approximative Darstellungen analytischer Funktionen, die durch Dirichletsche Reihen gegeben sind 190

Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung 212

Pollaczek, F., Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems . . . 230

Chowla, S., Contributions to the analytic theory of numbers 279

Weyl, H., Über Algebren, die mit der Komplexgruppe in Zusammenhang stehen, und ihre Darstellungen 300

Über einige Variationsprobleme*).

Von

Hermann Boerner in Leipzig.

In einer Abhandlung in den Göttinger Nachrichten[1]) hat Herr Professor Lichtenstein eine Methode zur Behandlung der sogenannten zweiten Variation, die für zweidimensionale Variationsprobleme von H. A. Schwarz begründet und von Herrn Lichtenstein fortgeführt worden ist, auf das einfachste eindimensionale Variationsproblem angewendet und dadurch der Theorie der Jacobischen Differentialgleichung eine neue Gestalt gegeben. Er erweitert diese Differentialgleichung durch Einführung eines Parameters λ, wendet gewisse von ihm für das entsprechende Eigenwertproblem abgeleitete Formeln[2]) an und findet für die zweite Variation die Formel

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2;$$

dabei sind die x_α die Entwicklungskoeffizienten der willkürlichen Funktion u $(y = \overset{0}{y} + \varepsilon u)$ nach den Eigenfunktionen. Hieraus ergibt sich sofort ein der Jacobischen Bedingung entsprechendes Kriterium für das Eintreten eines schwachen Minimums durch die Betrachtung des kleinsten positiven Eigenwertes λ_1. Ist die hinreichende Bedingung $\lambda_1 > 1$ erfüllt, so wird die Möglichkeit erwiesen, ein Feld von Extremalen zu konstruieren, in dem das Weierstraßsche Kriterium für das Eintreten eines starken Minimums angewendet werden kann. Im Falle $\lambda_1 = 1$ werden die höheren Variationen betrachtet und so eine beliebig weit fortsetzbare Reihe von teils notwendigen, teils hinreichenden Bedingungen aufgestellt.

*) Zweiter Teil der von der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig als Inaugural-Dissertation zugelassenen Arbeit „Über einige Eigenwertprobleme und ihre Anwendung in der Variationsrechnung".

[1]) L. Lichtenstein, Zur Variationsrechnung, Erste Mitteilung. Gött. Nachr. 1919, S. 161–192.

[2]) L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. Erste Abhandlung. Rend. circ. mat. Palermo **38** (1914), S. 113–166.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit werden die entsprechenden Ergebnisse für das Problem

$$(A) \qquad \delta \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx = 0$$

abgeleitet. Die hierzu notwendigen Sätze und Formeln über die Eigenwerte und Eigenfunktionen selbstadjungierter linearer Differentialgleichungen vierter Ordnung habe ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit[3]) hergeleitet. Es stellt sich als wesentlich heraus, daß man nicht eine Differentialgleichung von der meist üblichen Form $L\{u\} - \lambda k u = 0$ betrachtet — wobei der Differentialausdruck $L\{u\}$ den Eigenwertparameter nicht enthält —, sondern mehrere Terme der Differentialgleichung linear von λ abhängen läßt. Dadurch werden allerdings die Orthogonalitätsrelationen und die Ausdrücke für die Entwicklungskoeffizienten komplizierter. Eine prinzipielle Komplikation tritt bei der Betrachtung der höheren Variationen ein, wenn der kleinste positive Eigenwert nicht einfach ist. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf den Fall übertragen, wo im Integranden die Ableitungen der gesuchten Funktion bis zur n-ten Ordnung auftreten. Im 2. Kapitel seiner unter [1]) zitierten Arbeit behandelt Herr Lichtenstein den Fall, daß die Endpunkte der Extremalen auf zwei zur y-Achse parallelen Geraden beweglich sind. Analog hierzu werden wir zwei Fälle betrachten: einmal sollen die Endpunkte beweglich sein, während die Richtung der Extremalen dort fest vorgegeben ist; das andere Mal halten wir die Endpunkte fest, und die Richtung bleibt variabel.

Im zweiten Kapitel wird eine ebenfalls in (I) behandelte Integro-Differentialgleichung verwendet, um das folgende isoperimetrische Problem zu behandeln: das Integral

$$\int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx$$

ist zu einem Minimum zu machen unter der Nebenbedingung, daß ein anderes Integral

$$\int_a^b g(x, y, y', y'')\, dx$$

einen bestimmten Wert besitzt. Dabei folgen wir einer soeben erscheinenden Abhandlung des Herrn Lichtenstein[4]) über das einfachste isoperimetrische Problem[5]).

[3]) H. Boerner, Das Eigenwertproblem der selbstadjungierten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 293. Im folgenden mit (I) zitiert.

[4]) L. Lichtenstein, Zur Variationsrechnung. Zweite Mitteilung. Journal für Mathematik **165** (1931), S. 194–216.

[5]) Im allgemeinen vgl. zu den behandelten Problemen A. R. Forsyth, Calculus of variations, Cambridge 1927, Chapter III.

Wir werden die folgenden Ergebnisse und Formeln der Abhandlung (I) brauchen:

α) Sind $p(x) > 0$, $r(x)$ und $k(x)$ im Intervall $\langle a\, b\rangle$ erklärte stetige Funktionen, von denen $r(x)$ Ableitung erster Ordnung, $p(x)$ solche der ersten beiden Ordnungen hat, so besitzt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \lambda\left\{\frac{d}{dx}\left(r\frac{du}{dx}\right) - k\,u\right\} = 0 \tag{1}$$

mit der Randbedingung

$$u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \tag{2}$$

unendlich viele Eigenwerte λ_α, die sich im Endlichen nicht häufen, und zugehörige normierte Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x)$, die den Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_a^b \left[r\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\frac{d\varphi_\beta}{dx} + k\,\varphi_\alpha\varphi_\beta\right]dx = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\,\delta_{\alpha\beta}$$

genügen. Eine Funktion $u(x)$ heiße „zulässig", wenn sie der Bedingung (2) genügt und wenn ihre zweite Ableitung samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrabel ist $\left(\text{sodaß } \frac{du}{dx} = \int_a^x \frac{d^2u}{dx^2}\,dx \text{ gilt}\right)$ und absolut genommen unter einer ein für allemal festen Schranke liegt,

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| < M. \tag{3}$$

Die folgenden Beziehungen würden auch ohne diese letzte Bedingung gelten. Zur Abkürzung sei noch

$$N\{u\} = \int_a^b p\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx \tag{4}$$

gesetzt.

Ist $u(x)$ eine zulässige Funktion und setzt man

$$x_\alpha = \int_a^b \left[r\frac{du}{dx}\frac{d\varphi_\alpha}{dx} + k\,u\,\varphi_\alpha\right]dx, \tag{5}$$

so gilt

$$\int_a^b \left[r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + k\,u^2\right]dx = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\,x_\alpha^2 \tag{6}$$

und

$$N\{u\} \geqq \sum_\alpha |\lambda_\alpha|\, x_\alpha^2. \tag{7}$$

Falls eine gewisse Bedingung erfüllt ist, die im Falle $r \equiv 0$ bedeutet, daß $k(x)$ nicht in einem ganzen Intervall verschwindet, im allgemeinen Falle

sich aber nicht so einfach ausdrücken läßt[6]), so gilt in (7) immer das Gleichheitszeichen. In diesem Falle besteht für $u(x)$ die gliedweise differenzierbare Entwicklung

$$u(x) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha \varphi_\alpha(x).$$

β) Es sei eine Randbedingung von der Form

$$\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right]_{x=a} - \lambda h_1 u(a) = 0, \qquad \left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right]_{x=b} + \lambda h_2 u(b) = 0,$$

$$u'(a) = u'(b) = 0$$

vorgelegt. Legt man eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \lambda\left\{\frac{d}{dx}\left(r\frac{du}{dx}\right) - ku\right\} - qu = 0 \tag{8}$$

mit $q < 0$ zugrunde, so gelten über die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen die gleichen Sätze wie vorhin. Die Orthogonalitätsbeziehungen lauten jetzt

$$\int_a^b \left[r\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\frac{d\varphi_\beta}{dx} + k\varphi_\alpha\varphi_\beta\right]dx + h_1\varphi_\alpha(a)\varphi_\beta(a) + h_2\varphi_\alpha(b)\varphi_\beta(b) = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\delta_{\alpha\beta}.$$

Von den „zulässigen Funktionen" verlangt man am Rande nur noch das Verschwinden der Ableitung, muß aber für die Variationsrechnung außer (3) noch die Beschränktheit der Funktion selbst,

$$|u| < M \tag{9}$$

fordern. Für zulässige Funktionen gilt, mit

$$x_\alpha = \int_a^b \left[r\frac{du}{dx}\frac{d\varphi_\alpha}{dx} + ku\varphi_\alpha\right]dx + h_1 u(a)\varphi_\alpha(a) + h_2 u(b)\varphi_\alpha(b), \tag{10}$$

$$\int_a^b \left[r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + ku^2\right]dx + h_1 u^2(a) + h_2 u^2(b) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha^2 \tag{11}$$

und

$$N\{u\} - \int_a^b q u^2\, dx \geqq \sum |\lambda_\alpha| x_\alpha^2 \tag{12}$$

und ein Satz über die Entwickelbarkeit in dem Falle, wo in (12) das Zeichen $>$ auszuschließen ist — wie bei allen folgenden Problemen auch.

[6]) Es handelt sich um das „Abgeschlossensein" einer gewissen Bilinearform $\mathfrak{K}(X, Y)$ von unendlichvielen Variablen X_i, Y_i; vgl. (I), S. 304.

γ) Lautet die Randbedingung

$$u(a) = u(b) = 0,$$

$$\left[p\frac{d^2u}{dx^2}\right]_{x=a} + \lambda h_1 u'(a) = 0, \qquad \left[p\frac{d^2u}{dx^2}\right]_{x=b} - \lambda h_2 u'(b) = 0,$$

so kann man wieder von der Differentialgleichung (1) ausgehen. Die Orthogonalitätsbeziehungen heißen dann

$$\int_a^b \left[r\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\frac{d\varphi_\beta}{dx} + k\varphi_\alpha\varphi_\beta\right]dx + h_1\varphi'_\alpha(a)\varphi'_\beta(a) + h_2\varphi'_\alpha(b)\varphi'_\beta(b) = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\delta_{\alpha\beta}$$

und für zulässige Funktionen — die jetzt am Rande verschwinden, während außer (3) noch für die am Rande freie Ableitung

$$\left|\frac{du}{dx}\right| < M \tag{13}$$

zu fordern ist — gilt

$$\int_a^b \left[r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + ku^2\right]dx + h_1 u'^2(a) + h_2 u'^2(b) = \sum_a \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha^2 \tag{14}$$

und

$$N\{u\} \geqq \sum_\alpha |\lambda_\alpha| x_\alpha^2; \tag{15}$$

dabei ist

$$x_\alpha = \int_a^b \left[r\frac{du}{dx}\frac{d\varphi_\alpha}{dx} + ku\varphi_\alpha\right]dx + h_1 u'(a)\varphi'_\alpha(a) + h_2 u'(b)\varphi'_\alpha(b), \tag{16}$$

δ) Die selbstadjungierte lineare Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung wollen wir nicht erst hinschreiben, sondern nur den Satz angeben, den wir brauchen: Ist $p(x) > 0$ n-mal, $r_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ $n-\nu$-mal differenzierbar und $k(x)$ stetig, so gibt es zur Randbedingung

$$u = u' = \ldots = u^{(n-1)} = 0 \quad \text{in } a \text{ und } b \tag{17}$$

ein System von Eigenwerten λ_α und Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x)$ wie früher, sodaß für zulässige Funktionen — die der Randbedingung (17) und der Beziehung

$$\left|\frac{d^n u}{dx^n}\right| < M \tag{18}$$

genügen —

$$\int_a^b \left[r_1\left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)^2 + \ldots + r_{n-1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + ku^2\right]dx = \sum_a \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha^2 \tag{19}$$

und

$$\int_a^b p\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx \geqq \sum_\alpha |\lambda_\alpha| x_\alpha^2 \tag{20}$$

gilt. Dabei ist

$$(21) \qquad x_\alpha = \int_a^b \left[r_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{d^{n-1}\varphi_\alpha}{dx^{n-1}} + \ldots + r_{n-1} \frac{du}{dx} \frac{d\varphi_\alpha}{dx} + k u \varphi_\alpha \right] dx.$$

ε) Ist $N(x\,t) = N(t\,x)$ im Quadrat $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ stetig, so besitzt die Integro-Differentialgleichung

$$(22) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(p \frac{d^2u}{dx^2}\right) + \lambda \left\{ \frac{d}{dx}\left(r \frac{du}{dx}\right) - k u - \int_a^b N(x\,t)\, u(t)\, dt \right\} = 0,$$

mit der Randbedingung (2), ebenfalls unendlich viele sich im Endlichen nicht häufende Eigenwerte λ_α und zugehörige Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x)$, die den Bedingungen

$$\int_a^b \left[r \frac{d\varphi_\alpha}{dx} \frac{d\varphi_\beta}{dx} + k \varphi_\alpha \varphi_\beta \right] dx + \int_a^b \int_a^b N(x\,t)\, \varphi_\alpha(x)\, \varphi_\beta(t)\, dx\, dt = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \delta_{\alpha\beta}$$

genügen. Für zulässige Funktionen im Sinne der Randbedingung (2) gilt, mit

$$(23) \qquad x_\alpha = \int_a^b \left[r \frac{du}{dx} \frac{d\varphi_\alpha}{dx} + k u \varphi_\alpha \right] dx + \int_a^b \int_a^b N(x\,t)\, u(x)\, \varphi_\alpha(t)\, dx\, dt,$$

$$(24) \qquad \int_a^b \left[r \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + k u^2 \right] dx + \int_a^b \int_a^b N(x\,t)\, u(x)\, u(t)\, dx\, dt = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha^2$$

und

$$(25) \qquad N\{u\} \geqq \sum_\alpha |\lambda_\alpha|\, x_\alpha^2.$$

Erstes Kapitel.

Probleme ohne Nebenbedingungen.

1. Wir betrachten das Integral

$$(26) \qquad J\{y\} = \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx.$$

$f(x, y, z, t)$ sei als reguläre und analytische Funktion für alle Werte (x, y, z) in einem dreidimensionalen Bereich $\mathfrak{R}$, dessen Projektion auf die x-Achse insbesondere das Intervall $\langle a\,b\rangle$ enthält, und für alle reellen Werte von t erklärt. Wir wollen sagen, eine Funktion $y(x)$ sei in $\mathfrak{R}$ enthalten, wenn die Raumkurve $y = y(x)$, $z = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ ganz in diesem Bereiche verläuft.

Es sei $\overset{0}{y}(x)$ eine derartige Funktion, die im Intervall $\langle a\,b\rangle$ — eventuell in einem größeren Intervall, das dieses enthält — erklärt ist und der

Eulerschen Differentialgleichung

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0 \tag{27}$$

genügt[7]). Die Randwerte $\overset{0}{y}(a)$, $\overset{0}{y}(b)$, $\overset{0}{y}'(a)$, $\overset{0}{y}'(b)$ seien fest vorgegeben.

Wir betrachten die Klasse der „zulässigen Funktionen", wie sie im Abschnitt α) der Einleitung definiert wurde. Zulässige Funktionen erfüllen also insbesondere (2) und (3).

Es sei $u(x)$ irgendeine zulässige Funktion. Wir setzen $y(x) = \overset{0}{y}(x) + \varepsilon u(x)$ und wollen sagen, daß die Funktion $\overset{0}{y}(x)$ für das Integral $J\{y\} = J(\varepsilon)$ ein „schwaches Minimum" liefert, wenn die Größe

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) = \varepsilon^2 J_2\{u\} + \varepsilon^3 J_3\{u\} + \ldots \tag{28}$$

für jede zulässige Funktion und für genügend kleine Werte von $|\varepsilon|$ positiv ist.

Die Jacobische Differentialgleichung unseres Problems lautet

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{du}{dx}\right) - k(x)\,u(x) = 0. \tag{29}$$

Hierbei ist

$$p(x) = f_{y''y''}(x, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \overset{0}{y}'') \equiv \overset{0}{f}_{y''y''},$$

$$r(x) = -\overset{0}{f}_{y'y'} + \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{y'y''} + 2\overset{0}{f}_{yy''},$$

$$k(x) = -\overset{0}{f}_{yy} + \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{yy'} - \frac{d^2}{dx^2}\overset{0}{f}_{yy''}.$$

Es ist die Gleichung (1) von α), wenn man dort $\lambda = 1$ setzt. Wir wollen annehmen, daß die Legendresche Bedingung $\overset{0}{f}_{y''y''} \geqq 0$ in der verschärften Form erfüllt ist, die das Gleichheitszeichen ausschließt. Es ist also $p(x) > 0$. Für zulässige Funktionen gelten die Formeln (5), (6), (7).

Nun betrachten wir die „zweite Variation" J_2. Sie kann durch teilweise Integrationen so umgeformt werden:

$$J_2\{u\} = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\overset{0}{f}_{y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + 2\overset{0}{f}_{y''y'}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \ldots + \overset{0}{f}_{yy}u^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left[p\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k\,u^2\right]dx.$$

[7]) Von vornherein sei die Stetigkeit der zweiten Ableitung von $\overset{0}{y}(x)$ vorausgesetzt. Ist dann die „Legendresche Bedingung in verschärfter Form" erfüllt — was wir sogleich voraussetzen werden —, so läßt sich leicht zeigen (nach Dubois-Reymond und Hilbert), daß auch noch die dritte und vierte Ableitung vorhanden und stetig sind und $\overset{0}{y}(x)$ somit der Gleichung (27) in entwickelter Form genügt.

Mit (5) erhalten wir unter Berücksichtigung von (6) und (7) die fundamentale Beziehung

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\sum_{\alpha} |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2. \tag{30}$$

Falls die unter [6]) erwähnte Form $\mathfrak{R}(X, Y)$ abgeschlossen ist, gilt immer das Gleichheitszeichen. Der kleinste positive Eigenwert von (1) sei λ_1. (Sind alle Eigenwerte negativ, so setze man $\lambda_1 = +\infty$). Aus (30) folgt unmittelbar $\lambda_1 \geqq 1$ als *notwendige und hinreichende Bedingung für* $J_2 \geqq 0$.

Um den Rest

$$\Delta J - \varepsilon^2 J_2 = \frac{\varepsilon^3}{3}\int_a^b \left[\tilde{f}_{y''y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^3 + 3\tilde{f}_{y''y''y'}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 \frac{du}{dx} + \ldots + \tilde{f}_{yyy}u^3\right] dx \tag{31}$$

$$(\tilde{f} \equiv f(x, \overset{0}{y} + \varepsilon\vartheta_1 u, \overset{0}{y}' + \varepsilon\vartheta_1 u', \overset{0}{y}'' + \varepsilon\vartheta_1 u''),\ 0 < \vartheta_1 < 1)$$

von (28) abzuschätzen, bemerken wir, daß wegen (3)

$$\left|\frac{du}{dx}\right| < (b-a)M$$

(32) und

$$|u| < (b-a)^2 M$$

ist; ferner findet man in bekannter Weise

$$\int_a^b u^2\,dx \leqq (b-a)^2 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \leqq \gamma_1 N\{u\} \tag{33}$$ [8])

(γ_1 bedeutet eine positive Konstante wie in der Folge $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$). Mit Hilfe dieser Abschätzungen findet man leicht für den Betrag eines jeden Terms der rechten Seite von (31) eine obere Schranke von der Form konst. $M \cdot N\{u\}$. Es ist

$$6\int_a^b \tilde{f}_{y''y'y}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx}u\,dx = -3\int_a^b \tilde{f}_{y''y'y}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 dx - 3\int_a^b \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y''y'y}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 u\,dx,$$

so daß (32) und (33) auch auf diesen Term anwendbar sind. Es ist also

$$|\Delta J - \varepsilon^2 J_2| \leqq |\varepsilon|^3 \gamma_2 M N\{u\}. \tag{34}$$

Ist $\lambda_1 < 1$, so ist für $u = \varphi_1$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) < 0,$$

also wegen (34) für genügend kleine Werte von $|\varepsilon|$ gewiß

$$\Delta J < 0.$$

Es liegt kein Minimum vor.

[8]) Vgl. (4).

Ist $\lambda_1 > 1$, so ist

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) N\{u\}. \tag{35}$$

Dies ist evident, wenn in (30) immer das Gleichheitszeichen gilt. Ist das nicht der Fall, so schreibe man (7) in der Form

$$N\{u\} = \sum_{\alpha} |\lambda_\alpha| x_\alpha^2 + \Omega\{u\},$$

wobei $\Omega\{u\} \geqq 0$; man erhält

$$J_2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha}{}' \lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2 \quad \Omega\right\} \geqq \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \sum_{\alpha}{}' \lambda_\alpha x_\alpha^2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \Omega\right\},$$

also wieder (35). Wegen (34) und (35) wird für alle zulässigen Funktionen und hinreichend kleinen $|\varepsilon|$

$$\Delta J \geqq \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) - |\varepsilon| \gamma_2 M\right] N\{u\},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $u \equiv 0$ gilt. *Es liegt ein schwaches Minimum vor.*

Ist $\lambda_1 = 1$, so ist $J_2 \geqq 0$, und J_2 verschwindet, wenn man für u eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion setzt. Zur Entscheidung der Frage, ob ein Minimum eintritt, müssen die höheren Variationen herangezogen werden.

2. Es sei $\lambda_1 > 1$. Die Kurve $\overset{0}{y}(x)$ liefert gewiß ein schwaches Minimum für das Integral J. Wir fragen, unter welchen Bedingungen sogar ein „starkes Minimum" vorliegt. Dieser Begriff wird bei dem vorliegenden Problem naturgemäß so definiert: Die Funktion $\overset{0}{y}(x)$ soll dem Integral J auch dann noch einen Minimalwert erteilen, wenn man zum Vergleich benachbarte Kurven zuläßt, deren zweite Ableitung sich von $\overset{0}{y}''$ beliebig unterscheidet. Wir zeigen zunächst, daß *die Kurve* $\overset{0}{y}(x)$ *sich* unter der an die Spitze gestellten Voraussetzung *in ein Feld von Extremalen einbetten läßt.* In diesem Felde ist dann die Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion unseres Problems zu untersuchen.

Die Extremale $\overset{0}{y}(x)$ ist in ein *Feld von Extremalen* eingebettet, wenn es eine irgendwie von zwei Parametern abhängige Schar von Extremalen gibt, die $\overset{0}{y}$ enthält und einen Teilbereich $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{R}$ in der Weise einfach überdeckt, daß durch jeden Punkt (x, y, z) von $\mathfrak{E}$ eine und nur eine Extremale geht; mit andern Worten: zu jedem Wert x in $\langle a\, b\rangle$, y in einer gewissen Umgebung von $\overset{0}{y}(x)$ und y' in einer gewissen Umgebung von $\overset{0}{y}'(x)$ gehört genau eine Extremalfunktion, die im Punkte x diesen Wert und diese Ableitung besitzt. Wir zeigen, daß sich im Falle $\lambda_1 > 1$ ein solches Feld konstruieren läßt.

Wegen $\lambda_1 > 1$ besitzt, wie wir gesehen haben, die Gleichung (29) keine Lösung mit zwei doppelten Nullstellen im Innern oder auf dem

Rande von $\langle a\,b\rangle$. Dagegen existiert stets eine und nur eine Lösung w mit den Randwerten

$$w(a)=A,\quad w(b)=B,\quad w'(a)=C,\quad w'(b)=D,$$

wenn nur $(A, B, C, D)\neq(0,0,0,0)$ ist. Wir zeigen zunächst, daß es eine Zahl $\varepsilon_0>0$ gibt, sodaß zu jeder derartigen Lösung $w(x)$ von (29), die der Bedingung (3) genügt, für jedes ε, wenn nur $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ ist, eine Extremale $y(x)=\overset{0}{y}(x)+\varepsilon w(x)+\varepsilon z(x)$ mit den Randwerten

$$y(a)=\overset{0}{y}(a)+\varepsilon A,\qquad y(b)=\overset{0}{y}(b)+\varepsilon B,$$
$$y'(a)=\overset{0}{y}'(a)+\varepsilon C,\qquad y'(b)=\overset{0}{y}'(b)+\varepsilon D$$

gehört. Zur Bestimmung der samt ihrer Ableitung in a und b verschwindenden Funktion $z(x)$ ergibt sich aus der Eulerschen Differentialgleichung (27), der $y(x)$ genügen soll, eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(r\frac{dz}{dx}\right)-kz=\varepsilon F(z,z',z'',z''',z^{(4)}),\tag{36}$$

wobei F eine in $\mathfrak{R}$, d. h. für alle $(x, \overset{0}{y}+\varepsilon w+\varepsilon z, \overset{0}{y}'+\varepsilon w'+\varepsilon z')$ in $\mathfrak{R}$ und für alle reellen $z'', z''', z^{(4)}$ analytische und reguläre Funktion von $x, \varepsilon, z, z', \ldots$ ist. Diese Gleichung kann durch sukzessive Approximationen gelöst werden[9]).

Um von der durch $y=\overset{0}{y}+\varepsilon w+\varepsilon z$ dargestellten einparametrigen Extremalenschar zu einer Schar zu gelangen, die von zwei Parametern abhängt, beschränken wir uns auf positive ε und setzen $\varepsilon=|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$ und $w=\frac{\varepsilon_1 w_1+\varepsilon_2 w_2}{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|}$. Dabei sind w_1 und w_2 irgend zwei linear unabhängige Lösungen von (29). *Die Schar*

$$y(x)=\overset{0}{y}(x)+\varepsilon_1 w_1(x)+\varepsilon_2 w_2(x)+(|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|)z(x)$$

stellt für $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ *ein Feld von Extremalen dar, wenn in jedem Punkte von* $\langle a\,b\rangle$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial y}{\partial\varepsilon_1} & \frac{\partial y}{\partial\varepsilon_2}\\ \frac{\partial y'}{\partial\varepsilon_1} & \frac{\partial y'}{\partial\varepsilon_2}\end{matrix}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=\left|\begin{matrix}w_1 & w_2\\ w_1' & w_2'\end{matrix}\right|\neq 0\tag{37}$$

ist. Wegen $\lambda_1>1$ können dieser Bedingung genügende w_1, w_2 gewiß gefunden werden. Wir wollen annehmen, daß der Bereich $\mathfrak{R}$, in dem die Funktion $f(x, y, y', y'')$ definiert ist, so beschaffen ist, daß man die Extremale $\overset{0}{y}$ und die Funktionen $p>0$, r und k über a hinaus ein Stück nach links fortsetzen kann. Nun nehme man zwei linear unabhängige

[9]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 171ff., und den Anhang I der vorliegenden Arbeit.

Lösungen von (29), die beide in einem Punkte $x_0 < a$ nebst ihrer Ableitung verschwinden. Dann wird die Bedingung (37) gewiß erfüllt sein, wenn man nur x_0 nahe genug bei a wählt.

Die Extremalen des so konstruierten Feldes seien mit $y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bezeichnet, die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach ihren Argumenten mit y_x usw. Zu jedem Wertsystem (x, y, y'), das dem durch das Feld bestimmten dreidimensionalen Bereich $\mathfrak{E}$ angehört, gehört ein Wertepaar $\varepsilon_1(x, y, y')$, $\varepsilon_2(x, y, y')$; die Funktion y_{xx} kann so als Funktion des Ortes in $\mathfrak{E}$ aufgefaßt werden und sei als solche mit $p(x, y, y')$ bezeichnet. Wir betrachten nun eine beliebige Funktion $y(x)$, die die Randbedingungen $\bar{y}(a) = \overset{0}{y}(a), \ldots, y'(b) = \overset{0}{y}'(b)$ erfüllt und ganz im Felde verläuft, d. h. in $\mathfrak{E}$ enthalten ist; y und $\bar{y}'$ unterscheiden sich also wenig von $\overset{0}{y}$ und $\overset{0}{y}'$, während von der zweiten Ableitung nur das Vorhandensein vorausgesetzt wird. Zu jedem Wertsystem $(\xi, \bar{y}(\xi), y'(\xi))$, $a \leqq \xi \leqq b$, gehört ein Wertepaar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — wir können $\varepsilon_1(\xi), \varepsilon_2(\xi)$ schreiben —, also eine Extremale

$$y(x, \varepsilon_1(\xi), \varepsilon_2(\xi)), \tag{38}$$

die die Extremale $\overset{0}{y}$ in x_0 und die Kurve $\bar{y}$ in ξ berührt. Es ist

$$y(x, \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)) \equiv \bar{y}(x)$$

und

$$y_x(x, \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)) \equiv \bar{y}'(x).$$

Durch totales Differenzieren dieser Gleichungen findet man

$$y_{\varepsilon_1}\varepsilon_1'(x) + y_{\varepsilon_2}\varepsilon_2'(x) \equiv 0 \tag{39}$$

und

$$y_{x\varepsilon_1}\varepsilon_1'(x) + y_{x\varepsilon_2}\varepsilon_2'(x) = \bar{y}''(x) - p(x, \bar{y}, \bar{y}'). \tag{40}$$

Jetzt betrachten wir die Differenz

$$\int_a^{\xi} f(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')\,dx - \int_{x_0}^{\xi} f(x, y, y_x, p)\,dx,$$

wobei der zweite Term mit der Funktion (38) gebildet ist, und differenzieren sie nach ξ. Nach teilweiser Integration erhält man, wenn man beachtet, daß y eine Extremale ist, und wegen (39) und (40)

$$f(\xi, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') - f(\xi, \bar{y}, \bar{y}', p) - (\bar{y}'' - p) f_{y''}(\xi, \bar{y}, \bar{y}', p).$$

Wir setzen

$$\mathcal{E}(x, y, y', p, \tilde{p}) \equiv f(x, y, y', \tilde{p}) - f(x, y, y', p) - (\tilde{p} - p) f_{y''}(x, y, y', p)$$

und erhalten durch Integration

$$\int_a^b f(x, \bar{y}, y', y'')\,dx - \int_a^b f(x, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \overset{0}{y}'')\,dx = \int_a^b \mathcal{E}(x, y, y', p, y'')\,dx.$$

Daraus erkennt man leicht, daß *ein starkes Minimum vorliegt, wenn*

$$\mathcal{E}(x, y, y', p, \tilde{p}) > 0$$

ist in $\mathfrak{E}$ *und für alle reellen* $\tilde{p} \neq p$ [10]).

3. Ist $\lambda_1 = 1$, so bringt jede zugehörige Eigenfunktion die zweite Variation zum Verschwinden. Man muß die höheren Variationen betrachten. Es zeigt sich dabei, daß die Verhältnisse bei der Entwicklung (28) prinzipiell anders liegen als bei der Taylor-Entwicklung in der Differentialrechnung. Man kann die verschiedenen Variationen nicht gesondert betrachten, sondern muß für geeignete Kombinationen aus ihnen Bedingungen aufstellen. Im Falle, daß der Eigenwert 1 einfach ist, verläuft die Entwicklung genau so für unser Problem wie für das einfachste Variationsproblem[11]) und sei deshalb hier nur kurz angedeutet.

Wir behalten die Bezeichnungen vom ersten Abschnitt bei und setzen jetzt

$$u = x_1 \varphi_1 - v .$$

Dann wird

$$J_2\{u\} = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 - r\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - kv\right] dx = \frac{1}{2}\sum{}' \lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2 = J_2\{v\} , \quad [12])$$

wobei der Strich andeutet, daß bei der Summation der dem Eigenwert λ_1 entsprechende Term wegzulassen ist.

Der Integrand im Ausdruck für die dritte Variation

$$J_3\{u\} = \frac{1}{3!}\int_a^b \left[\overset{0}{f}_{y''y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^3 + \ldots + \overset{0}{f}_{yyy} u^3\right] dx$$

wird eine ganze rationale Funktion dritten Grades von $v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}$. Die von v und seinen Ableitungen freien Glieder sind $x_1^3 J_3\{\varphi_1\}$.

[10]) Die durchgeführten Betrachtungen zeigen zugleich, daß das Integral

$$\int_a^{(xyy')} [f(x, \bar{y}, \bar{y}', p) + (\bar{y}'' - p) f_{y''}(x, \bar{y}, \bar{y}', p)]\, dx$$

für alle in $\mathfrak{E}$ verlaufenden Funktionen $y(x)$ mit $\bar{y}(a) = \overset{0}{y}(a)$, $\bar{y}'(a) = \overset{0}{y}'(a)$, $\bar{y}(x) = y$, $\bar{y}'(x) = y'$ denselben Wert besitzt: „Hilbertscher Unabhängigkeitssatz" für unser Problem. Man kann natürlich diese Sätze auch aus den entsprechenden für das allgemeine „Lagrangesche Problem" ableiten. Vgl. z. B. O. Bolza, Vorl. über Variationsrechnung, Leipzig-Berlin 1909, S. 636. Zu dem vorstehenden Beweis vgl. L. Tonelli, Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, Bd. II, Bologna 1923, Nr. 193 b.

[11]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 175 ff.

[12]) Von hier an soll vorausgesetzt werden, daß die unter [6]) erwähnte Form $\mathfrak{R}(X, Y)$ abgeschlossen ist. Es ist übrigens nicht schwer, das hier verwendete Eigenwertproblem durch ein solches zu ersetzen, bei dem dies gewiß der Fall ist und das für $\lambda = 1$ ebenfalls die Gleichung (29) liefert. Es würde von der in (I), S. 306 behandelten Form sein. Vgl. auch L. Lichtenstein loc. cit. [4]), S. 215.

Damit ein Minimum eintreten kann, muß notwendig

$$J_3\{\varphi_1\} = 0 \tag{41}$$

sein.

Für die übrigen Terme, mit Ausnahme derer vom ersten Grade in v und seinen Ableitungen, findet man leicht Schranken von der Form konst. $\cdot N\{v\}$; bezeichnet man ihre Summe mit $\bar{J}_3$, so ist also

$$|\bar{J}_3| \leqq \gamma_3 N\{v\}.$$

Die Terme vom ersten Grade endlich werden durch teilweise Integration auf die Form

$$x_1^2 \int_a^b h\, v\, dx = x_1^2 \sum_\alpha{}' \dot{x}_\alpha \int_a^b h\, \varphi_\alpha\, dx = x_1^2 \sum_\alpha{}' x_\alpha S_\alpha \tag{42}$$

gebracht, wobei h eine leicht anzugebende in $\langle a\, b\rangle$ analytische Funktion ist und die S_α demnach bekannte Zahlen sind. In derselben Weise wird die vierte Variation umgeformt:

$$J_4\{u\} = \bar{J}_4 + x_1^3 \int_a^b h^{(1)}\, v\, dx + x_1^4 J_4\{\varphi_1\} = \bar{J}_4 + x_1^3 \sum{}' x_\alpha T_\alpha + x_1^4 J_4\{\varphi_1\},$$
$$|\bar{J}_4| \leqq \gamma_4 N\{v\}.$$

Die Gesamtvariation sieht jetzt so aus:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \varepsilon^2 J_2 + \varepsilon^3 J_3 + \varepsilon^4 J_4 + \varepsilon^5 R_5 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \sum{}' \left\{ \lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2 + 2\varepsilon x_1^2 x_\alpha (S_\alpha + \varepsilon x_1 T_\alpha) \right\} \\ &\quad + \varepsilon^3 \bar{J}_3 + \varepsilon^4 \bar{J}_4 + \varepsilon^4 x_1^4 J_4\{\varphi_1\} + \varepsilon^5 R_5. \end{aligned} \tag{43}$$

Die in x_α linearen Glieder werden durch die folgende Umformung beseitigt:

$$\begin{aligned} \Delta J = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum{}' |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) \left\{ x_\alpha + \varepsilon x_1^2 \frac{S_\alpha + \varepsilon x_1 T_\alpha}{|\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)} \right\}^2 + \varepsilon^3 \bar{J}_3 \\ + \varepsilon^4 \bar{J}_4 + \varepsilon^4 x_1^4 \left\{ J_4\{\varphi_1\} - \sum{}' \frac{(S_\alpha + \varepsilon x_1 T_\alpha)^2}{2 |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)} \right\} + \varepsilon^5 R_5. \end{aligned} \tag{44}$$

Da $\sum' x_\alpha (S_\alpha + \varepsilon x_1 T_\alpha)$ für alle x_α mit konvergentem $\sum' |\lambda_\alpha| x_\alpha^2$ (diesen entsprechen die „zulässigen" v, wenn man von (3) absieht) konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum' \frac{(S_\alpha + \varepsilon x_1 T_\alpha)^2}{|\lambda_\alpha|}$ und demnach, da sich die λ_α im Endlichen nicht häufen, auch die Reihe im vorletzten Term der rechten Seite von (44).

Man kann nun zeigen, daß aus (44) *die für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung*

$$\Delta_4 = J_4\{\varphi_1\} - \sum{}' \frac{S_\alpha^2}{2 \lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)} \geqq 0 \tag{45}$$

folgt. Der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden. Man zeigt, daß im Falle

$$\Delta_4 > 0 \tag{46}$$

tatsächlich ein schwaches Minimum vorliegt. Ist $\Delta_4 < 0$, so läßt sich ein Wertsystem x_α angeben, das der Gesamtvariation für alle genügend kleinen ε einen negativen Wert erteilt. Ist endlich $\Delta_4 = 0$, so müssen die höheren Variationen herangezogen werden, was in ähnlicher Weise geschehen kann.

Es mögen jetzt zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ zwei Eigenfunktionen $\overline{\varphi}_1$ und $\overline{\overline{\varphi}}_1$ gehören. Es sei $u = \bar{x}_1 \overline{\varphi}_1 + \bar{\bar{x}}_1 \overline{\overline{\varphi}}_1 + v$. Setzt man

$$\bar{x}_1 \overline{\varphi}_1 + \bar{\bar{x}}_1 \overline{\overline{\varphi}}_1 \equiv x_1 \varphi_1 \tag{47}$$

mit $x_1^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{\bar{x}}_1^2$, so ist φ_1 richtig normiert. Für jede so gebildete Eigenfunktion φ_1 müssen nun die oben abgeleiteten notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen erfüllt sein, speziell also auch für $\overline{\varphi}_1$ und φ_1.

Führt man (47) in den Ausdruck für $J_3\{\varphi_1\}$ ein, so entsteht ein Polynom dritten Grades in $\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1$,

$$x_1^3 J_3\{\varphi_1\} = \bar{x}_1^3 J_3\{\varphi_1\} + 3\bar{x}_1^2 x_1 J_3^{(1)}(\overline{\varphi}_1, \varphi_1\} + 3\bar{x}_1 \bar{\bar{x}}_1^2 J_3^{(2)}\{\varphi_1, \overline{\varphi}_1\} + \bar{\bar{x}}_1^3 J_3\{\varphi_1\},$$

wobei $J_3^{(1)}\{u, v\} = J_3^{(2)}\{v, u\}$ ein leicht anzugebendes Funktional ist. Man sieht, daß notwendig

$$J_3\{\overline{\varphi}_1\} = J_3^{(1)}\{\overline{\varphi}_1, \overline{\overline{\varphi}}_1\} = J_3^{(2)}\{\overline{\varphi}_1, \overline{\overline{\varphi}}_1\} = J_3\{\overline{\overline{\varphi}}_1\} = 0$$

sein muß, damit (41) für alle φ_1 erfüllt ist.

Die Abschätzungen für J_3 und J_4 behalten ihre Form. An die Stelle von (42) tritt eine quadratische Form in $\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1$,

$$\sum{}' x_\alpha (\bar{x}_1^2 S_\alpha^{(1)} + 2\bar{x}_1 \bar{\bar{x}}_1 S_\alpha^{(2)} + \bar{\bar{x}}_1^2 S_\alpha^{(3)}).$$

Entsprechend kommt bei der vierten Variation

$$\sum{}' x_\alpha (\bar{x}_1^3 T_\alpha^{(1)} + 3\bar{x}_1^2 \bar{\bar{x}}_1 T_\alpha^{(2)} + 3\bar{x}_1 \bar{\bar{x}}_1^2 T_\alpha^{(3)} + \bar{\bar{x}}_1^3 T_\alpha^{(4)}),$$

und es wird

$$\begin{aligned} x_1^4 J_4\{\varphi_1\} = {} & \bar{x}_1^4 J_4\{\overline{\varphi}_1\} + 4\bar{x}_1^3 \bar{\bar{x}}_1 J_4^{(1)}\{\overline{\varphi}_1, \overline{\overline{\varphi}}_1\} + 6\bar{x}_1^2 \bar{\bar{x}}_1^2 J_4^{(2)}\{\overline{\varphi}_1, \overline{\overline{\varphi}}_1\} \\ & + 4\bar{x}_1 \bar{\bar{x}}_1^3 J_4^{(3)}\{\overline{\varphi}_1, \varphi_1\} + \bar{\bar{x}}_1^4 J_4\{\overline{\varphi}_1\}, \end{aligned} \tag{48}$$

wobei $J_4^{(1)}\{u, v\} = J_4^{(3)}\{v, u\}$ ist. Der Koeffizient von $2\varepsilon x_\alpha$ im ersten Term der rechten Seite von (43) erhält die Form

$$\begin{aligned} & \bar{x}_1^2 (S_\alpha^{(1)} + \varepsilon \bar{x}_1 T_\alpha^{(1)} + \varepsilon \bar{\bar{x}}_1 T_\alpha^{(2)}) + 2\bar{x}_1 x_1 (S_\alpha^{(2)} + \varepsilon \bar{x}_1 T_\alpha^{(2)} + \varepsilon \bar{\bar{x}}_1 T_\alpha^{(3)}) \\ & + x_1^2 (S_\alpha^{(3)} + \varepsilon \bar{x}_1 T_\alpha^{(3)} + \varepsilon x_1 T_\alpha^{(4)}) = \Omega_\alpha, \end{aligned} \tag{49}$$

so daß wir mit der Umformung (44) für die Gesamtvariation den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta J = {} & \frac{\varepsilon^2}{2} \sum{}' |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) \left\{ x_\alpha + \varepsilon \frac{\Omega_\alpha}{|\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)} \right\}^2 + \varepsilon^3 \bar{J}_3 \\ & + \varepsilon^4 J_4 + \varepsilon^4 \left\{ x_1^4 J_4\{\varphi_1\} - \sum{}' \frac{\Omega_\alpha^2}{2\lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)} \right\} + \varepsilon^5 R_5 \end{aligned}$$

erhalten. Die vorhin mit $x_1^4 \Delta_4$ bezeichnete Größe entsteht aus der letzten geschweiften Klammer, wenn man, in Ω_α, $\varepsilon = 0$ setzt. Sie ist ein homogenes Polynom vierten Grades in $\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1$, dessen Koeffizienten sich sofort angeben lassen, wenn man (48) und (49) heranzieht. Nimmt dieses Polynom für alle von $(0, 0)$ verschiedenen $(\bar{x}_1, x_1)$ nur positive Werte an, so liegt ein schwaches Minimum vor. Kann es negativ gemacht werden, so bestimmen die entsprechenden $\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1$ zusammen mit geeignet zu wählenden weiteren x_α (s. o.) eine Funktion u, die die Gesamtvariation negativ macht. Ist das Polynom $\geqq 0$, so müssen die höheren Variationen herangezogen werden.

4. Wir wollen jetzt die Endpunkte der Extremalen $\overset{0}{y}(x)$ auf den Geraden $x = a$, $x = b$ frei beweglich annehmen. Dagegen sei die Richtung $\overset{0}{y}'(a), \overset{0}{y}'(b)$ in diesen Punkten fest vorgegeben. Mit $u(x)$ sei irgendeine zulässige Funktion im Sinne von Abschnitt β) der Einleitung bezeichnet. Wir lassen $\overset{0}{y}$ in $\overset{0}{y} + \varepsilon u$ übergehen und betrachten die zweite Variation J_2, die wir durch teilweise Integrationen auf die folgende Form bringen.

$$(50) \qquad J_2\{u\} = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\overset{0}{f}_{y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \ldots + \overset{0}{f}_{yy} u^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left[p\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - q\,u^2 - r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k\,u^2\right] dx - \frac{1}{2}\left(h_1 u^2(a) + h_2 u^2(b)\right).$$

$p(x)$ und $r(x)$ haben die gleiche Bedeutung wie früher; dagegen ist $q(x)$ eine beliebige stetige in $\langle a\,b\rangle$ negative Funktion,

$$k(x) = -\overset{0}{f}_{yy} + \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{yy'} - \frac{d^2}{dx^2}\overset{0}{f}_{yy''} - q(x)$$

und

$$h_1 = \left[\overset{0}{f}_{yy'} - \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{yy''}\right]_{x=a}, \qquad h_2 = -\left[\overset{0}{f}_{yy'} - \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{yy''}\right]_{x=b}.$$

Ist λ_1^* diejenige Zahl, die in den vorigen Abschnitten λ_1 hieß, also der kleinste positive zu dem einfachsten Randwertproblem gehörige Eigenwert der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p\,\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(r\,\frac{du}{dx}\right) - \lambda(k + q)\,u = 0$$

in der jetzigen Bezeichnungsweise, so *muß auch jetzt* $\lambda_1^* \geqq 1$ *sein, damit ein Minimum vorliegen kann*; denn es muß speziell auch für am Rande verschwindende u $J_2 \geqq 0$ sein.

Betrachten wir jetzt die Eigenwerte λ_α und Eigenfunktionen φ_α der Differentialgleichung (8) von β), so folgt aus (50) und den dortigen Rela-

tionen (10), (11), (12) sofort

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\sum_{\alpha} |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2. \tag{51}$$

λ_1 bezeichne wieder den kleinsten positiven Eigenwert.

Ist $\lambda_1 < 1$, so kann die zweite Variation negativ gemacht werden. *Es liegt kein Minimum vor.*

Ist $\lambda_1 > 1$, so folgt aus (51) ähnlich wie im ersten Abschnitt

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(N\{u\} - \int_a^b q\, u^2\, dx\right),$$

und man findet

$$\Delta J \geqq \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) - \gamma_5 |\varepsilon| M\right)\left(N\{u\} - \int_a^b q\, u^2\, dx\right).$$

Es liegt ein schwaches Minimum vor.

Die Betrachtung zeigt, daß, wenn bei einer bestimmten Wahl der Funktion $q < 0$ die Bedingung $\lambda_1 > 1$ erfüllt ist, sie das in jedem Falle ist, wie man auch $q < 0$ wählen möge. Man kann das auch direkt zeigen. Es sei für $q = q_1$ der kleinste positive Eigenwert $\lambda_1^{(0)} > 1$, für $q = q_2$ dagegen $\lambda_1^{(1)} < 1$. Man setze $q = q_1 + \mu(q_2 - q_1)$. Dann gibt es aus Stetigkeitsgründen einen Wert μ im Intervall $\langle 0\,1\rangle$, für den $\lambda_1^{(\mu)} = 1$ ausfällt. Für $\lambda = 1$ stimmen aber alle diese Gleichungen überein, was wegen $\lambda_1^{(0)} > 1$ zu einem Widerspruch Anlaß gibt.

Zu einem ähnlichen Resultat führt die Verwendung der Eigenwerte und Eigenfunktionen von γ), wenn man die Endpunkte der Extremalen $\overset{0}{y}(x)$ fest vorgeschrieben annimmt, dagegen die Richtung frei wählbar läßt. Ist $u(x)$ eine zulässige Funktion im Sinne von γ) und ersetzt man $\overset{0}{y}$ durch $\overset{0}{y} + \varepsilon u$, so wird nach teilweiser Integration

$$J_2\{u\} = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k u^2\right] dx - \frac{1}{2}\left(h_1 u'^2(a) + h_2 u'^2(b)\right),$$

$$k = -\overset{0}{f}_{yy} + \frac{d}{dx}\overset{0}{f}_{yy'} - \frac{d^2}{dx^2}\overset{0}{f}_{yy''},$$

$$h_1 = -\left[\overset{0}{f}_{y'y''}\right]_{x=a}, \qquad h_2 = -\left[\overset{0}{f}_{y'y''}\right]_{x=b}.$$

Aus den Formeln (14), (15), (16) folgt

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\sum_{\alpha} |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2.$$

Wieder ist $\lambda_1^* \geqq 1$ eine für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung.

λ_1 sei der kleinste positive Eigenwert von γ). Wenn $\lambda_1 < 1$ ist, so folgt unmittelbar, daß *kein Minimum vorliegt.* Ist $\lambda_1 > 1$, so ist

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) N\{u\}$$

und

$$\Delta J \geqq \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) - \gamma_6 |\varepsilon| M\right) N\{u\},$$

es liegt also ein schwaches Minimum vor.

5. Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen bietet auch hier die Verallgemeinerung der im ersten und zweiten Abschnitt gewonnenen Resultate auf das Minimumproblem eines Integrals von der allgemeinen Gestalt

$$\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

keine Schwierigkeiten. Die Funktion f sei analytisch und regulär für die Werte von $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ in einem gewissen $(n+1)$-dimensionalen Bereich und alle reellen $y^{(n)}$. Die Funktion $\overset{0}{y}(x)$ genüge der Eulerschen Differentialgleichung

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0\,.$$

Ihre Randwerte und die ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ seien fest vorgegeben. „Zulässige Funktionen" haben wir im Abschnitt δ) der Einleitung definiert. „Schwaches Minimum" heißt: im Vergleich mit allen $\overset{0}{y} + \varepsilon u$ für hinreichend kleine $|\varepsilon|$ und zulässige u.

Die zweite Variation J_2 wird durch teilweise Integration auf die Form

$$J_2\{u\} = \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i,j=1}^{n} \overset{0}{f}_{y^{(i)} y^{(j)}} \frac{d^i u}{dx^i} \frac{d^j u}{dx^j}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^b \left[p\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 - r_1\left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)^2 - \ldots - r_{n-1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - k u^2\right] dx$$

gebracht. Es sei $\overset{0}{f}_{y^{(n)} y^{(n)}} = p > 0$. Aus (19), (20) und (21) folgt sofort

$$J_2\{u\} \geqq \frac{1}{2}\sum_\alpha \lambda_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2. \tag{52}$$

Für den Rest gilt wieder eine Ungleichheit

$$|\Delta J - \varepsilon^2 J_2| \leqq |\varepsilon|^3 \gamma_7 M \int_a^b p\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx\,. \tag{53}$$

Denn für jeden Term der Form

$$\int_a^b \tilde{f}_{y^{(i)}y^{(j)}y^{(l)}} \left(\frac{d^i u}{dx^i}\right)^2 \frac{d^j u}{dx^j} dx \qquad (i = j \text{ oder } i \neq j)$$

läßt sich eine Schranke konst. $M \int_a^b p \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx$ finden, und Terme von der Form

$$\int_a^b \tilde{f}_{y^{(i)}y^{(j)}y^{(l)}} \frac{d^i u}{dx^i} \frac{d^j u}{dx^j} \frac{d^l u}{dx^l} dx \qquad (i > j > l)$$

können durch teilweise Integration auf diese Form gebracht werden.

Aus (52) und (53) schließt man wie früher: *Ist der kleinste positive Eigenwert* $\lambda_1 < 1$, *so liegt gewiß kein Minimum vor. Ist* $\lambda_1 > 1$, *so liegt ein schwaches Minimum vor.* Der Fall $\lambda_1 = 1$ bleibt unentschieden.

Ist $\lambda_1 > 1$, so kann ein von n Parametern abhängendes Feld von Extremalen, derart, daß durch jedes Wertsystem $(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ aus einem gewissen die Extremale $\overset{0}{y}(x)$ enthaltenden $(n+1)$-dimensionalen Bereich eine und nur eine Extremale des Feldes bestimmt ist, wie im zweiten Abschnitt durch sukzessive Approximationen konstruiert werden unter Benutzung der n-parametrigen Schar von Lösungen der Jacobischen Differentialgleichung, die sämtlich samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ in einem Punkte links von a verschwinden. Und ein „starkes Minimum" liegt vor, wenn in diesem Felde und für alle $\tilde{p} \neq p$ die Funktion

$$\mathcal{E}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, p, \tilde{p}) \equiv f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \tilde{p}) - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, p) - (\tilde{p} - p) f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, p) > 0$$

ist. Denn für eine beliebige im Felde verlaufende, den Randbedingungen genügende Kurve $y = y(x)$, wobei von $\overline{y}^{(n)}(x)$ nur das Vorhandensein vorausgesetzt wird, gilt

$$\int_a^b f(x, \overline{y}, \overline{y}', \ldots, \overline{y}^{(n)}) dx - \int_a^b f(x, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \ldots, \overset{0}{y}^{(n)}) dx = \int_a^b \mathcal{E}(x, \overline{y}, \overline{y}', \ldots, \overline{y}^{(n-1)}, p, \overline{y}^{(n)}) dx,$$

was man in derselben Weise beweist wie im Falle $n = 2$.

Zweites Kapitel.

Isoperimetrische Probleme.

1. Es sei $\overset{0}{y}(x)$ wie früher eine in $\langle a\, b\rangle$ nebst ihren Ableitungen bis zur vierten Ordnung[13]) stetige Funktion. Unter welchen Bedingungen er-

[13]) Vgl. Fußnote [7]).

teilt diese Funktion dem Integral

$$J\{y\} = \int_a^b f(x, y, y', y'')\, dx$$

einen Minimalwert, wenn man zur Konkurrenz alle stetigen Funktionen $y(x)$ mit $y(a) = \overset{0}{y}(a)$, $y(b) = \overset{0}{y}(b)$, $y'(a) = \overset{0}{y}'(a)$, $y'(b) = \overset{0}{y}'(b)$ zuläßt, die stetige Ableitung erster, abteilungsweise stetige Ableitung zweiter Ordnung besitzen und dem Integral

$$K\{y\} = \int_a^b g(x, y, y', y'')\, dx$$

einen festen Wert erteilen, $K\{y\} = K\{\overset{0}{y}\}$? Wir fragen nach einem „schwachen Minimum", es sei also $|y - \overset{0}{y}|$, $|y' - \overset{0}{y}'|$, $|y'' - \overset{0}{y}''|$ hinreichend klein. f und g sind, wie früher f, in einem dreidimensionalen Bereich $\mathfrak{R}$, der $\overset{c}{y}$ enthält, und für alle y'' erklärt.

Die Klasse der „zulässigen Funktionen" ist wie in α) definiert. Ist $u(x)$ eine zulässige Funktion und wird $y = \overset{0}{y} + \varepsilon u$ gesetzt, so ist wie früher

$$\Delta J\{u\} = \varepsilon J_1\{u\} + \varepsilon^2 J_2\{u\} + \varepsilon^3 J_3\{u\} + \dots$$

(jetzt ist im allgemeinen $J_1 \neq 0$), und analog sei

$$\Delta K\{u\} = \varepsilon K_1\{u\} + \varepsilon^2 K_2\{u\} + \varepsilon^3 K_3\{u\} + \dots .$$

Unter Benutzung einer naheliegenden Abkürzung setzen wir noch, wenn $u, \bar{u}$ zulässige Funktionen sind,

$$J_2\{u + \bar{u}\} = J_2\{u\} + 2J_2\{u, \bar{u}\} + J_2\{\bar{u}\};$$

die entsprechende Bedeutung hat das Zeichen $K_2\{u, \bar{u}\}$.

Von der Funktion $\overset{0}{y}(x)$ sei vorausgesetzt, daß sie keine Extremale für das Integral K ist. Dann gibt es gewiß eine zulässige Funktion $v_1(x)$ mit stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung, für die $K_1\{v_1\} \neq 0$ ist. Eine solche Funktion werde irgendwie, aber ein für allemal fest gewählt. Zur Abkürzung setzen wir $K_1\{v_1\} = \omega$.

Es sei $v(x)$ eine beliebige zulässige Funktion. Wir setzen

$$u = v + \psi v_1 \quad (y = \overset{0}{y} + \varepsilon v + \varepsilon \psi v_1)$$

und suchen das Funktional

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$$

in Abhängigkeit von den Funktionen v_1 und v so zu bestimmen, daß für alle zulässigen Funktionen v und alle absolut genommenen hinreichend kleinen ε

$$\Delta K\{u\} = \varepsilon K_1\{v + \psi v_1\} + \varepsilon^2 K_2\{v + \psi v_1\} + \dots = 0 \tag{54}$$

wird. Man findet durch Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ε nacheinander

$$\psi_0 = -\frac{1}{\omega} K_1\{v\},$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{\omega} K_2\{v + \psi_0 v_1\}, \tag{55}$$

$$\psi_2 = \frac{2}{\omega^2} K_2\{v + \psi_0 v_1\} K_2\{v + \psi_0 v_1, v_1\} - \frac{1}{\omega} K_3\{v + \psi_0 v_1\},$$

. . . . . .

Man kann (54) in der Form

$$-\varepsilon\omega\psi = \Delta K\{v\} + \varepsilon^2 (K_2\{v + \psi v_1\} - K_2\{v\}) + \varepsilon^3 (K_3\{v + \psi v_1\} - K_3\{v\}) + \ldots$$
$$= \Delta K\{v\} + \varepsilon^2 \psi \Delta\{\psi, v\}$$

schreiben, woraus sich wegen

$$\Delta K\{v\} = \varepsilon \int_a^b \left[\tilde{g}_{y'} \frac{d^2 v}{dx^2} + \tilde{g}_{y'} \frac{dv}{dx} + \tilde{g}_y v\right] dx$$

$$(\tilde{g} \equiv g(x, \overset{0}{y} + \varepsilon \vartheta_2 v, \ldots),\ 0 < \vartheta_2 < 1)$$

folgern läßt, daß

$$|\psi| < \gamma_8 \int_a^b \left|\frac{d^2 v}{dx^2}\right| dx \tag{56}$$

ist. Daraus folgt leicht

$$\left|\frac{d^2 u}{dx^2}\right| < M_1 = \gamma_9 M \qquad (\gamma_9 > 1).$$

Damit $u(x)$ eine zulässige Funktion wird, braucht man also nur

$$\left|\frac{d^2 v}{dx^2}\right| < \frac{M}{\gamma_9}$$

anzunehmen. Wir setzen noch

$$\hat{u} = v + \psi_0 v_1 = v - \frac{1}{\omega} K_1\{v\} v_1,$$

dann gelten für $\hat{u}(x)$ ähnliche Ungleichheitsbeziehungen, und es läßt sich jedenfalls eine Konstante γ^* so bestimmen, daß für

$$\left|\frac{d^2 v}{dx^2}\right| < \gamma^* M$$

$u(x)$ und $\hat{u}(x)$ zulässige Funktionen sind. Wie man sieht, ist $K_1\{\hat{u}\} = 0$.

Es handelt sich nun darum, für die soeben definierten Funktionen u (für die $\Delta K\{u\}$ verschwindet) die Größe $\Delta J\{u\}$ zu bestimmen. Man findet (vgl. (55))

$$J_1\{u\} = J_1\{v\} - \frac{1}{\omega} K_1\{v\} J_1\{v_1\} - \frac{\varepsilon}{\omega} K_2\{\hat{u}\} J_1\{v_1\} + ((\varepsilon^2))$$

($((\varepsilon^i))$ bezeichnet immer die Gesamtheit der Glieder i-ter und höherer Ordnung in ε),

$$J_2\{u\} = J_2\{\hat{u}\} + ((\varepsilon)),$$

folglich, wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{\omega} J_1\{v_1\} = \frac{J_1\{v_1\}}{K_1\{v_1\}} = \mu$$

setzt,

$$\Delta J\{u\} = \varepsilon(J_1\{v\} - \mu K_1\{v\}) + \varepsilon^2(J_2\{\hat{u}\} - \mu K_2\{\hat{u}\}) + ((\varepsilon^3))$$

und mit

$$l(x, y, y', y'') = f(x, y, y', y'') - \mu g(x, y, y', y''),$$

$$L\{y\} = \int_a^b l(x, y, y', y'')\, dx$$

endgültig

$$\Delta J\{u\} = \varepsilon L_1\{v\} + \varepsilon^2 L_2\{\hat{u}\} + ((\varepsilon^3)). \tag{57}$$

Hieraus erhält man sofort die *erste notwendige Bedingung* (Eulersche Regel), daß für alle zulässigen Funktionen $v(x)$ $L_1\{v\} = 0$ sein muß, d. h. *daß die Funktion $\overset{0}{y}(x)$ der Eulerschen Differentialgleichung, gebildet mit der Funktion $l(x, y, y', y'')$, genügen muß*, und die *zweite notwendige Bedingung*: $L_2\{\hat{u}\} \geqq 0$ *für alle zulässigen Funktionen $\hat{u}$, die der Bedingung $K_1\{\hat{u}\} = 0$ genügen.* Denn jede derartige Funktion $\hat{u}$ läßt sich in der Form $\hat{u} = v + \gamma_0 v_1$ darstellen: man braucht nur $v = \hat{u}$ zu wählen.

Aus der zweiten notwendigen Bedingung folgt in bekannter Weise, daß jedenfalls in $\langle a\, b\rangle$

$$\overset{0}{l}_{y''y''} \geqq 0 \quad (\overset{0}{l} \equiv l(x, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \overset{0}{y}''))$$

sein muß. Wir nehmen an, daß sogar $\overset{0}{l}_{y''y''} > 0$ ist und formen, um zu weiteren Bedingungen zu gelangen, den Ausdruck $L_2\{\hat{u}\}$ um.

2. Wir setzen

$$\overset{0}{l}_{y''y''} = p(x) \quad (> 0),$$

$$-\overset{0}{l}_{y'y'} + \frac{d}{dx}\overset{0}{l}_{y'y''} + 2\overset{0}{l}_{yy''} = r(x),$$

$$-\overset{0}{l}_{yy} + \frac{d}{dx}\overset{0}{l}_{yy'} - \frac{d^2}{dx^2}\overset{0}{l}_{yy''} = k(x).$$

Dann ist, unter u irgendeine zulässige Funktion verstanden,

$$L_2\{u\} = \int_a^b \left[p\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - r\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - ku^2\right] dx,$$

und falls u stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt, ergibt sich

durch teilweise Integration weiter

$$L_2\{u\} = \int_a^b u\,\chi\{u\}\,dx,$$

wobei zur Abkürzung

$$\chi\{u\} \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(p\,\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(r\,\frac{du}{dx}\right) - k\,u$$

gesetzt wurde. Ist $\bar{u}$ eine weitere zulässige Funktion, so gilt

$$L_2\{u, \bar{u}\} = \int_a^b \left[p\,\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - r\,\frac{du}{dx}\,\frac{d\bar{u}}{dx} - k\,u\,\bar{u}\right] dx = \int_a^b \bar{u}\,\chi\{u\}\,dx.$$

Es war

$$\hat{u} = v - \frac{1}{\omega}\,K_1\{v\}\,v_1;$$

daraus folgt

$$L_2\{\hat{u}\} = L_2\{v\} - 2\cdot\frac{1}{\omega}\,K_1\{v\}\,L_2\{v, v_1\} + \frac{1}{\omega^2}\,(K_1\{v\})^2\,L_2\{v_1\}$$

$$= L_2\{v\} - 2\int_a^b K(x)v(x)dx\int_a^b v(x)\,\chi\{v_1(x)\}\,dx + \alpha\,(\int_a^b K(x)\,v(x)\,dx)^2,$$

wobei zur Abkürzung $L_2\{v_1\} = \alpha$ und

$$\frac{1}{\omega}\left(\overset{0}{g}_y - \frac{d}{dx}\,\overset{0}{g}_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\,\overset{0}{g}_{y''}\right) = K(x)$$

gesetzt ist. Dafür kann man auch schreiben

$$L_2\{\hat{u}\} = L_2\{v\} - \int_a^b\int_a^b N(x\,t)\,v(x)\,v(t)\,dx\,dt \tag{58}$$

mit

$$N(x\,t) = K(x)\,\chi\{v_1(t)\} + K(t)\,\chi\{v_1(x)\} - \alpha\,K(x)\,K(t) = N(t\,x). \tag{59}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß für das identische Verschwinden von $N(x\,t)$ die Beziehung $\chi\{v_1\} = 0$ notwendig und hinreichend ist[14]). Es sei noch angemerkt, daß

$$\int_a^b K(x)\,v_1(x)\,dx = 1 \tag{60}$$

ist.

Betrachten wir jetzt die Integro-Differentialgleichung

$$\chi\{u(x)\} - \int_a^b N(x\,t)\,u(t)\,dt = 0, \tag{61}$$

[14]) Aus $N(x\,x) = 0$ folgt $\chi\{v_1\} = \frac{\alpha}{2}\,K$; multipliziert man mit v_1 und integriert, so kommt $\alpha = \frac{\alpha}{2}$, mithin $\alpha = 0$ und $\chi\{v_1\} = 0$.

so verifiziert man leicht, daß sie stets eine (zulässige, d. h. zur Randbedingung (2) gehörige) Eigenlösung u_1 besitzt, nämlich $u_1 = v_1$ (vgl. (60)).

Wir setzen zunächst voraus, daß die Differentialgleichung

$$\chi\{u\} = 0$$

keine (zulässige) Eigenlösung besitzt. Dann existiert die zum Differentialausdruck $\chi\{u\}$ gehörige Greensche Funktion $\Gamma(\xi x)$, und es ist stets

$$u(\xi) = -\int_a^b \Gamma(\xi x)\, \chi\{u(x)\}\, dx. \tag{62}$$

Wegen

$$v_1(\xi) = -\int_a^b \Gamma(\xi x)\, \chi\{v_1(x)\}\, dx \tag{63}$$

und (60) ist

$$\begin{aligned} &\int_a^b\int_a^b \Gamma(\xi x)\, K(\xi)\, \chi\{v_1(x)\}\, d\xi\, dx = -1, \\ &\int_a^b\int_a^b \Gamma(\xi x)\, \chi\{v_1(\xi)\}\, \chi\{v_1(x)\}\, d\xi\, dx = -\alpha. \end{aligned} \tag{64}$$

Die Gleichung (61) ergibt jetzt

$$\begin{aligned} \chi\{u\} &= \int_a^b N(x t)\, u(t)\, dt \\ &= \chi\{v_1(x)\}\int_a^b K(t)\, u(t)\, dt + K(x)\int_a^b \chi\{v_1(t)\}\, u(t)\, dt \\ &\quad - \alpha K(x)\int_a^b K(t)\, u(t)\, dt \\ &= r_1\, \chi\{v_1(x)\} + (r_2 - \alpha r_1)\, K(x), \end{aligned}$$

und aus (62) folgt, wenn man (63) berücksichtigt,

$$u(\xi) = r_1 v_1(\xi) - (r_2 - \alpha r_1)\int_a^b \Gamma(\xi x)\, K(x)\, dx.$$

Es kann also höchstens noch *eine* weitere Eigenfunktion

$$u_2 = \int_a^b \Gamma(\xi x)\, K(x)\, dx$$

geben. Nun muß aber $r_1 = \int_a^b K u\, dt$ sein; das ergibt

$$(r_2 - \alpha r_1)\int_a^b\int_a^b \Gamma(\xi x)\, K(\xi)\, K(x)\, d\xi\, dx = 0.$$

(Die entsprechende Relation für r_2 ist, wie man sich überzeugt, von selbst erfüllt.) Ist

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(\xi x)\, K(\xi)\, K(x)\, d\xi\, dx \neq 0,$$

so ist r_1 willkürlich und r_2 so zu bestimmen, daß $r_2 - \alpha \cdot r_1 = 0$ wird. Es existiert nur die eine Eigenfunktion $u_1 = v_1$. Im anderen Falle sind r_1 und r_2 willkürlich, es existieren die beiden Eigenfunktionen u_1 und u_2.

Jetzt sei vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung $\chi\{u\} = 0$ eine oder zwei zulässige Eigenlösungen besitzt, u^* und u^{**} (evtl. sei $u^{**} \equiv 0$). Ist $K_1\{u^*\} \neq 0$, so kann man $v_1 = u^*$ gewählt annehmen. Dann ist $N(x\,t) \equiv 0$, und es gibt gewiß nur die Eigenfunktion u^*, oder u^* und u^{**}.

Um die Lösungen allgemein diskutieren zu können, müssen wir wieder die Greensche Funktion heranziehen, diesmal, da $\Gamma(\xi\,x)$ nicht existiert, die „Greensche Funktion im erweiterten Sinne", $\hat{\Gamma}(\xi\,x)$. Sie genügt nicht, wie $\Gamma(\xi\,x)$, der Differentialgleichung $\chi\{u\} = 0$, sondern es ist

$$\chi\{\hat{\Gamma}(\xi\,x)\} = u^*(\xi)\,u^*(x) + u^{**}(\xi)\,u^{**}(x)$$

und

$$\int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,u^*(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,u^{**}(x)\,dx = 0.$$

Ist $h(x)$ eine in $\langle a\,b\rangle$ stetige den Bedingungen

$$\int_a^b h\,u^*\,dx = 0, \qquad \int_a^b h\,u^{**}\,dx = 0$$

genügende Funktion, so ist

$$u(\xi) = -\int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,h(x)\,dx$$

die durch die Bedingungen

$$\int_a^b u\,u^*\,dx = 0, \qquad \int_a^b u\,u^{**}\,dx = 0$$

festgelegte zulässige Lösung der Differentialgleichung

$$\chi\{u\} = h(x).$$

Wir nehmen jetzt an, es sei $v_1 \neq u^*$, u^{**} irgendwie gewählt. Dann gilt wieder

$$\int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,\chi\{v_1(x)\}\,dx = -v_1(\xi),$$

und demnach auch

$$\int_a^b\int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,K(\xi)\,\chi\{v_1(x)\}\,d\xi\,dx = -1,$$

$$\int_a^b\int_a^b \hat{\Gamma}(\xi\,x)\,\chi\{v_1(\xi)\}\,\chi\{v_1(x)\}\,d\xi\,dx = -\alpha.$$

Wir betrachten wieder die Gleichung

$$\chi\{u(x)\} = r_1\,\chi\{v_1(x)\} + (r_2 - \alpha r_1)\,K(x).$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$u(\xi) = r_1 v_1(\xi) - (r_2 - \alpha \cdot r_1) \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi x)\, K(x)\, dx + c_1 u^* + c_2 u^{**},$$

vorausgesetzt, daß die Bedingungen

$$r_1 \int_a^b u^* \chi\{v_1\}\, dx + (r_2 - \alpha r_1) \int_a^b K u^*\, dx = 0$$

und

$$r_1 \int_a^b u^{**} \chi\{v_1\}\, dx + (r_2 - \alpha r_1) \int_a^b K u^{**}\, dx = 0$$

erfüllt sind. In diesen Gleichungen ist der erste Term links gewiß Null. Denn es ist z. B.

$$\int_a^b u^* \chi\{v_1\}\, dx = \int_a^b v_1 \chi\{u^*\}\, dx = 0.$$

Ist nun wieder mindestens eine der beiden Größen $K_1\{u^*\}$, $K_1\{u^{**}\}$ von Null verschieden, so muß $r_2 - \alpha r_1 = 0$ sein. Die Bedingung $r_1 = \int K u\, dt$ liefert dann sofort

$$c_1 \int_a^b K u^*\, dt + c_2 \int_a^b K u^{**}\, dt = 0,$$

d. h. außer v_1 ist noch dasjenige Linearaggregat $\tilde{u}$ von u^* und u^{**} Eigenfunktion, das der Bedingung $\int K \tilde{u}\, dt = 0$ genügt.

Ist hingegen

$$\int_a^b K u^*\, dt = \int_a^b K u^{**}\, dt = 0,$$

so bleibt r_2 zunächst willkürlich. Die Bedingung $r_1 \int K u\, dt$ ergibt aber

$$(r_2 - \alpha r_1) \int_a^b \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi x)\, K(\xi)\, K(x)\, d\xi\, dx = 0.$$

(Die Relation für r_2 ist wieder von selbst erfüllt.) Falls

$$\int_a^b \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi x)\, K(\xi)\, K(x)\, d\xi\, dx \neq 0$$

ist, so erhält man wieder $r_2 - \alpha r_1 = 0$; r_1, c_1 und c_2 bleiben willkürlich, es gibt drei Eigenfunktionen v_1, u^* und u^{**}. Ist $u^{**} \equiv 0$, so lauten die zuletzt gewonnenen Resultate so: außer v_1 ist u^* Eigenfunktion, wenn $\int K u^*\, dt = 0$ ist.

Ist aber auch noch

$$\int_a^b \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi x)\, K(\xi)\, K(x)\, d\xi\, dx = 0,$$

so bleiben sämtliche Konstanten willkürlich, es existiert noch eine vierte Eigenfunktion

$$u = \int_a^b \hat{\Gamma}(\xi x)\, K(x)\, dx.$$

3. Kehren wir zur Betrachtung der zweiten notwendigen Bedingung

$$(65) \qquad 2 L_2\{\hat{u}\} = \int_a^b \left[p \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 - r \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - k v^2 \right] dx - \int_a^b \int_a^b N(xt)\, v(x)\, v(t)\, dx\, dt \geqq 0$$

zurück. Es war

$$\hat{u} = v - \frac{K_1\{v\}}{\omega} v_1.$$

Zu jeder zulässigen Funktion $\dot{u}$ mit $K_1\{\dot{u}\} = 0$ existiert danach eine Schar der Funktionen $v = \hat{u} + \beta v_1$, β eine willkürliche Konstante. Zu $\hat{u} \equiv 0$ gehört $v = \beta v_1$. Fordert man aber von der zulässigen Funktion v noch, daß

$$\int_a^b \left[r \frac{dv}{dx} \frac{dv_1}{dx} + k v v_1 \right] dx + \int_a^b \int_a^b N(xt)\, v(x)\, v_1(t)\, dx\, dt = 0$$

ist, so gehört, wie man sich überzeugt, zu jedem $\dot{u}$ eine und nur eine Funktion v, insbesondere zu $\hat{u} \equiv 0$ die Funktion $v \equiv 0$, so daß die Funktion $v = v_1$, die stets der Integro-Differentialgleichung (61) genügt, nicht auftreten kann.

Wir führen jetzt, mit (59), die Eigenwerte und Eigenfunktionen von Abschnitt (ε) der Einleitung ein, die wir zweckmäßig, die zum Eigenwert 1 gehörige triviale Eigenfunktion v_1 aussondernd, mit

$$1;\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$$
$$v_1;\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

bezeichnen. Aus (23), (24), (25) (man setze dort v statt u) ergibt sich sofort

$$L_2\{\hat{u}\} \geqq \frac{1}{2} \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2.$$

Daraus folgt: *Es ist dann und nur dann* $L_2\{\hat{u}\} \geqq 0$, *wenn der kleinste positive nichttriviale Eigenwert* $\lambda_1 \geqq 1$ *ist.*

Es sei $\lambda_1 > 1$. Auf dieselbe Weise wie schon einmal (vgl. (35)) findet man, daß

$$(66) \qquad L_2\{\hat{u}\} \geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) N\{v\}$$

ist.

Wir kehren jetzt zu der im ersten Abschnitt aufgestellten speziellen zulässigen Funktion $u(x)$ zurück. Zu jeder der Bedingung $K_1\{\hat{u}\} = 0$ genügenden Funktion $\hat{u}(x)$ gehört eine derartige Funktion

$$u(x) \quad \hat{u} + \varepsilon \psi_1 v_1 + \varepsilon^2 \psi_2 v_1 + \ldots,$$

für die (54) gilt und

$$(67) \qquad \Delta J\{u\} = \varepsilon J_1\{u\} + \varepsilon^2 J_2\{u\} + \varepsilon^3 J_3\{u\} + \ldots = \varepsilon^2 L_2\{\hat{u}\} + ((\varepsilon^3))$$

ist. Es muß noch die hier auftretende Größe $((\varepsilon^3))$ abgeschätzt werden. Man findet für sie [27]) eine Schranke $\varepsilon^3 \gamma_{10} N\{v\}$. Unter Berücksichtigung von (66) erhält man also

$$\Delta J\{u\} \geqq \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) - |\varepsilon| \gamma_{10}\right) \varepsilon^2 N\{v\},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $v = 0$, d. h. $u = 0$ gilt. Daraus folgt: *Ist $\lambda_1 > 1$, so ist für absolut genommen hinreichend kleine ε $\Delta J > 0$, d. h. es liegt wirklich ein schwaches Minimum vor.*

Anhang I.

Auflösung der Gleichung (36) durch sukzessive Approximationen.

Mit $\mathfrak{G}(\xi x)$ sei die Greensche Funtion von (29) mit der Randbedingung (2) bezeichnet, die wegen $\lambda_1 > 1$ gewiß existiert. Wenn $H(x)$ irgendeine in $\langle a\,b\rangle$ stetige Funktion bezeichnet, so ist

$$z(\xi) = -\int_a^b \mathfrak{G}(\xi x)\, H(x)\, dx$$

die am Rande nebst ihrer Ableitung verschwindende Lösung von

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p \frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(r \frac{dz}{dx}\right) - kz = H,$$

und falls $|H(x)| < N$ ist, so gilt

$$(a) \qquad |z|, \left|\frac{dz}{dx}\right|, \ldots, \left|\frac{d^4 z}{dx^4}\right| < \eta N,$$

unter η eine positive Konstante verstanden.

Im vorliegenden Falle ist

$$z(\xi) = -\varepsilon \int_a^b \mathfrak{G}(\xi x)\, F(z, z', \ldots, z^{(4)})\, dx.$$

Für $|\varepsilon| < \varepsilon^{(0)}$, x in $\langle a\,b\rangle$ und $|z|, |z'|, \ldots, |z^{(4)}| < \delta$ möge

$$(b) \qquad |F|, |F_z|, |F_{z'}|, \ldots, |F_{z^{(4)}}| < N$$

[27]) Siehe Anhang II.

sein. Wir setzen

$$z_1(\xi) = -\varepsilon \int_a^b \mathfrak{G}(\xi x)\, F(0, \ldots, 0)\, dx,$$

(c)

$$z_\nu(\xi) = -\varepsilon \int_a^b \mathfrak{G}(\xi x)\, F(z_{\nu-1}, z'_{\nu-1}, \ldots, z^{(4)}_{\nu-1})\, dx \qquad (\nu = 2, \ldots).$$

Aus (a), (b) und (c) folgt, wenn

$$|\varepsilon| < \varepsilon^{(1)} = \mathrm{Min}\left(\varepsilon^{(0)}, \frac{\delta}{\eta N}\right)$$

angenommen wird,

(d) $$|z_\nu|, |z'_\nu|, \ldots, |z^{(4)}_\nu| < \delta$$

für alle ν. Mit

$$\zeta_\nu = z_{\nu+1} - z_\nu$$

folgt aus (c)

$$\zeta_\nu = -\varepsilon \int_a^b \mathfrak{G}(\xi x)\, [\tilde{F}_z \zeta_{\nu-1} + \tilde{F}_{z'} \zeta'_{\nu-1} + \ldots + \tilde{F}_{z^{(4)}} \zeta^{(4)}_{\nu-1}]\, dx$$

$$(\tilde{F} \equiv F(z_{\nu-1} + \vartheta_3 \zeta_{\nu-1}, \ldots, z^{(4)}_{\nu-1} + \vartheta_3 \zeta^{(4)}_{\nu-1}), \quad 0 < \vartheta_3 < 1).$$

Wegen (d) ($\nu = 1$ und $\nu = 2$) ist

$$|\zeta_1|, |\zeta'_1|, \ldots, |\zeta^{(4)}_1| < 2\delta,$$

folglich wegen (a) und (b), wenn

$$|\varepsilon| < \varepsilon^{(2)} = \mathrm{Min}\left(\varepsilon^{(1)}, \frac{1}{8\eta N}\right)$$

ist,

$$|\zeta_2|, |\zeta'_2|, \ldots, |\zeta^{(4)}_2| < \delta$$

und allgemein

$$|\zeta_\nu|, |\zeta'_\nu|, \ldots, |\zeta^{(4)}_\nu| < \frac{\delta}{2^{\nu-2}}.$$

Die Reihen

$$z_1 + \sum_\nu \zeta_\nu, \quad z'_1 + \sum_\nu \zeta'_\nu, \quad z''_1 + \sum_\nu \zeta''_\nu, \quad z'''_1 + \sum_\nu \zeta'''_\nu, \quad z^{(4)}_1 + \sum_\nu \zeta^{(4)}_\nu$$

konvergieren für alle $|\varepsilon| < \varepsilon^{(2)}$ in $\langle a\, b \rangle$ unbedingt und gleichmäßig. Die Funktion $z = z_1 + \sum_\nu \zeta_\nu$ genügt der Differentialgleichung (36). Wir können $\varepsilon_0 = \varepsilon^{(2)}$ setzen.

Anhang II.

Abschätzung des Restes ((ε^3)) von (67).

Es handelt sich um die mit der dritten und höheren Potenzen von ε behafteten Glieder in der Reihe

$$\varepsilon J_1 \{\hat{u} + \varepsilon \psi_1 v_1 + \varepsilon^2 \psi_2 v_1 + \ldots\} + \varepsilon^2 J_2 \{\hat{u} + \varepsilon \psi_1 v_1 + \varepsilon^2 \psi_2 v_1 + \ldots\} + \ldots,$$

also um die Größe

$$\text{(e)}\quad \begin{aligned}&\varepsilon^3(\psi_2+\varepsilon\psi_3+\varepsilon^2\psi_4+\ldots)J_1\{v_1\}+2\varepsilon^3(\psi_1+\varepsilon\psi_2+\varepsilon^2\psi_3+\ldots)J_2\{\hat{u},v_1\}\\&+\varepsilon^4(\psi_1+\varepsilon\psi_2+\ldots)^2J_2\{v_1\}+\varepsilon^3J_3\{u\}+\varepsilon^4J_4\{u\}+\ldots.\end{aligned}$$

Setzt man in (54) $\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\ldots$ und für ψ_0 seinen Wert aus (55), so erhält man nach Division durch ε^2

$$\text{(f)}\quad -(\psi_1+\varepsilon\psi_2+\ldots)=\frac{1}{\omega}(K_2\{u\}+\varepsilon K_3\{u\}+\ldots)$$

$$=\frac{1}{2\omega}\int_a^b\left[\hat{g}_{y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2+\ldots\right]dx$$

$$(\hat{g}\equiv g(x,\overset{0}{y}+\vartheta_4u,\ldots),\ 0<\vartheta_4<1).$$

Aus (56) kann man

$$\text{(g)}\quad \int_a^b\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx\leqq\gamma_{11}N\{v\}$$

folgern. Deshalb folgt aus (f) sofort

$$\text{(h)}\quad |\psi_1+\varepsilon\psi_2+\varepsilon^2\psi_3+\ldots|<\gamma_{12}N\{v\}.$$

Wir führen in (54) auch noch den aus (55) für ψ_1 folgenden Ausdruck ein und erhalten nach Division durch ε^3

$$-(\psi_2+\varepsilon\psi_3+\ldots)=\frac{1}{\omega}\Big(2K_2\{\hat{u},\psi_1v_1+\varepsilon\psi_2v_1+\ldots\}$$

$$+\varepsilon K_2\{\psi_1v_1+\varepsilon\psi_2v_1+\ldots\}+\frac{1}{3!}\int_a^b\left[\bar{g}_{y''y''y''}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^3+\ldots\right]dx\Big)$$

$$(\bar{g}\equiv g(x,\overset{0}{y}+\varepsilon\vartheta_5u,\ldots),\ 0<\vartheta_5<1).$$

Hieraus kann man ähnlich wie vorhin eine Ungleichheit

$$\text{(i)}\quad |\psi_2+\varepsilon\psi_3+\varepsilon^2\psi_4+\ldots|<\gamma_{13}\int_a^b\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx<\gamma_{14}N\{v\}$$

ableiten.

Kehren wir zu (e) zurück. Wir können jetzt für diese Größe eine Schranke der Form $\gamma_{10}\,\varepsilon^3N\{v\}$ herleiten. Das folgt für den ersten Term sofort aus (i), für den zweiten und dritten aus (h). Der Rest wird wie im ersten Abschnitt des ersten Kapitels abgeschätzt (vgl. (31) und (34)) und dann (g) berücksichtigt.

(Eingegangen am 2. März 1931.)

Approximative Darstellungen analytischer Funktionen, die durch Dirichletsche Reihen gegeben sind.

Von

Maria-Pia Geppert in Breslau.

§ 1.

Einleitung.

Es bezeichne $N_f(\sigma_0, T)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(\sigma + it)$ in $\sigma > \sigma_0$, $0 < t < T$. Die Riemannsche Vermutung lautet dann — da nach der Funktionalgleichung die kritischen Nullstellen der ζ-Funktion symmetrisch zur kritischen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ und zur reellen Achse liegen —

$$N_\zeta(\sigma_0, T) = 0$$

für jedes $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ und beliebiges T. Die beste Abschätzung von $N_\zeta(\sigma_0, T)$ für $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ erzielte zuerst Carlson („Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion", Arkiv för Mat., Astr. och fysik **15**); sie lautet

$$N_\zeta(\sigma_0, T) = O(T^{1-(2\sigma_0-1)^2+\varepsilon})$$

für jedes $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ und $\varepsilon > 0$. Und zwar bewies er folgenden allgemeinen Satz über die Nullstellen einer Dirichletschen Reihe:

Wenn

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ konvergent, a_n beliebig komplex,

$$a_1 \neq 0,$$

die reziproke Reihe

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s}$$

und

$$\varrho = \operatorname{Max}\left(0, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |b_n|}{\log n}\right)$$

ist, dann gilt

$$N_f(\sigma_0, T) < T^{1-(2\sigma_0-1)(2\sigma_0-1-2\varrho)+\varepsilon} + T^{2-2\sigma_0+2\varrho+\varepsilon}$$

für jedes $\sigma_0 > \frac{1}{2} + \varrho$ und $\varepsilon > 0$.

Die ζ-Funktion erfüllt die Voraussetzungen dieses Satzes nicht — die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ ist ja in $0 < \sigma < 1$ wegen des Pols $s = 1$ nicht konvergent —; für $\zeta(s)$ mußte Carlson daher die obige Abschätzung erst indirekt aus diesem Satze ableiten. Das veranlaßte Hoheisel („Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion", Sitzungsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Klasse, 1930, S. 4), einen neuen Beweis anzugeben, der die Zetafunktion direkt erfaßt; durch diese Methode wird sogar die Carlsonsche Abschätzung für die Zetafunktion noch etwas verschärft („Primzahlprobleme in der Analysis", ebenda, 1930, S. 7). Hoheisel beschränkt sich in diesem Beweise auf die ζ-Funktion allein. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese direkte Methode auf allgemeinere Dirichletsche Reihen anzuwenden, um für verwandte zahlentheoretisch bedeutsame Funktionen — die Dedekindschen ζ_K-Funktionen und die L_K-Reihen im allgemeinen algebraischen Körper K — ähnliche Nullstellenresultate zu erzielen.

Hoheisels Methode benutzt wesentlich, daß für die ζ-Funktion und die Abschnitte $\sum_1^Z \frac{\mu(n)}{n^s}$ ihrer reziproken Reihe, wenn Z mit t wächst und $\arg f(s)$ in der dort angegebenen Weise eindeutig festgelegt ist (Backlund, „Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion", Acta Math. **41** (1918)),

$$(1) \qquad \arg \zeta(\sigma + it) = O(\log t), \qquad \arg \sum_1^Z \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} = O(\log t)$$

in $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 2$ gilt; ferner, daß für $2 < |t| < 2\pi BN$ mit $B < 1$, $\sigma > 0$

$$(2) \qquad \zeta(s) - \sum_1^N \frac{1}{n^s} = O(N^{-\sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma})$$

gilt (Hardy-Littlewood, „The zeros of Riemann's Zeta-Function", Math. Zeitschr. **10** (1921)).

Die Argumentabschätzung (1) gilt, wie in § 3 streng analog Backlund ausgeführt wird, ganz genau so für gewöhnliche Dirichletsche Reihen $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$, wenn mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$a_n = O(n^\varepsilon)$$

ist.

Schwieriger ist es, ein der Gleichung (2) entsprechendes Resultat zu gewinnen. Nur für die Dirichletschen L-Reihen

$$L(s, \varkappa) = \sum_1^\infty \frac{\varkappa(n)}{n^s}$$

im rationalen Zahlenkörper ist die Übertragung von (2) mittels der von Hardy-Littlewood für $\zeta(s)$ benutzten „Methode trivial; ist nämlich der Charakter $\varkappa$ der Restklassengruppe mod k zugeordnet, so gilt

$$\varkappa(n) = \varkappa(n + k),$$

und $L(s, \varkappa)$ wird durch

$$L(s, \varkappa) = \sum_{m=1}^{k-1} \varkappa^{(m)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \lambda \cdot k)^s} = \frac{1}{k^s} \cdot \sum_{m=1}^{k-1} \varkappa^{(m)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + \frac{m}{k}\right)^s}$$

auf die Funktion

$$\zeta(s, w) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + w)^s}$$

mit konstantem w zurückgeführt. Für diese läßt sich aber der Beweis von (2), den Hardy-Littlewood (Math. Zeitschr. **10** (1921)) angeben, wörtlich übertragen und liefert genau dasselbe Resultat. Der Beweis gestaltet sich so:

Die Anwendung des ersten Schrittes der Eulerschen Summenformel auf die Funktion $(w + x)^{-s}$ in $N+1, \ldots, \infty$ liefert zunächst für $\sigma > 1$

$$\sum_{N+1}^{\infty} (w + n)^{-s} = \int_N^\infty (w + x)^{-s} dx - \frac{1}{2} \cdot (w + N)^{-s} + s \cdot \int_N^\infty P_1(x) \cdot (w + x)^{-s-1},$$

wo

$$P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$$

dem ersten Bernoullischen Polynom, $x - [x]$, eng verwandt ist; wegen seiner Beschränktheit ist das Integral für $\sigma > 0$ konvergent; das erste Integral rechnet sich leicht aus; also folgt nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung

$$\zeta(s, w) - \sum_0^N (n + w)^{-s} = \frac{(w + N)^{1-s}}{s - 1} - \frac{1}{2} \cdot (w + N)^{-s} + s \cdot \int_N^\infty P_1(x) \cdot (w + x)^{-s-1}$$

für $\sigma > 0$. Zur Abschätzung des Integrals wird die Fouriersche Entwicklung

$$P_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n} \cdot \sin 2\pi n x$$

eingesetzt und gliedweise integriert. Daß dies im ganzen Intervall $N \ldots \infty$ erlaubt ist, einschließlich der Umgebungen der Punkte $N+1$, $N+2$, ..., in denen die Fouriersche Reihe nicht gleichmäßig konvergiert, zeigt man

leicht im Anschluß an Schnee (Math. Zeitschr. **31** (1930)), indem man

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\int_{m}^{m\pm\frac{1}{M}}(x+w)^{-s-1}\cdot\sin 2\pi n x\cdot dx=0$$

für $\sigma>-1$ und jedes m beweist und dann in

$$\int_{m+\frac{1}{M}}^{m+1-\frac{1}{M}}(x+w)^{-s-1}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}\cdot dx=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\int_{m+\frac{1}{M}}^{m+1-\frac{1}{M}}(x+w)^{-s-1}\cdot\sin 2\pi n x\cdot dx$$

den Grenzübergang $M\to\infty$ macht. Die Integrale

$$\int_{N}^{\infty}(w+x)^{-s-1}\cdot\sin 2\pi n x\cdot dx$$

werden dann mittels des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung leicht abgeschätzt, so daß

$$\zeta(s,w)-\sum_{0}^{N}(n+w)^{-s}=O(t^{-1}\cdot N^{1-\sigma})+O(N^{-\sigma})$$

für $\sigma>0$ resultiert.

Übertragbar ist diese Methode wegen der entscheidenden Verwendung des zweiten Mittelwertsatzes nur für spezielle Fälle und für solche triviale Fälle im allgemeinen, in denen dasselbe Resultat schon direkt aus der Beschaffenheit der Koeffizienten abgelesen werden kann. Dagegen ist übertragbar der von Hoheisel und Titchmarsh (The Zeta-Function of Riemann S. 29, 1930) angegebene funktionentheoretische Beweis von (2), dem eine allgemein verwendbare, schon von Lindelöf (Calcul des Résidus S. 52, 1905) stammende residuenrechnerische Methode zugrunde liegt. Auch diese Methode allein führt im allgemeinen nicht zum Ziel, sondern führt nur die Summe auf ein Integral zurück. Kombiniert man aber das Ergebnis mit dem, welches die Anwendung der Eulerschen Summenformel liefert — sie führt nämlich die Summe auf das gleiche Integral zurück —, so erhält man wirklich eine Abschätzung von der Art (2), nämlich

$$f(s)-\sum_{1}^{N}\frac{a_n}{n^s}=O(t\cdot N^{\vartheta-\sigma})+O(t^{-1}\cdot N^{1-\sigma})+O(N^{-\sigma})$$

für $\sigma>\mathrm{Max}(\vartheta,0)$, $|t|\to\infty$, $N\to\infty$, $|t|<2\pi BN$ mit $B<1$, vorausgesetzt, daß

$$\sum_{1}^{m}a_n=A\cdot m+O(m^{\vartheta})$$

mit $\vartheta<1$ gilt. Dieses Verfahren ist zwar methodisch interessant und liefert in gewissen Spezialfällen brauchbarere Resultate als das hier zu

besprechende; in diesem Zusammenhange interessieren diese Resultate aber nicht; überdies ist der Beweis umständlich; wir unterdrücken ihn daher und beweisen denselben Satz auf wesentlich anderem und einfacherem Wege, nur unter Benutzung der bereits bekannten Abschätzung von $\zeta(s) - \sum_1^N \frac{1}{n^s}$. Als Nebenresultat ergibt sich bei beiden Beweismethoden die immerhin merkwürdige Tatsache, daß die Funktion $f(s)$ in $\sigma > \mathrm{Max}(\vartheta, 0)$ keine Singularitäten hat außer dem einfachen Pol $s=1$ mit dem Residuum A und der wesentlichen Singularität im Unendlichen.

In § 4 wird endlich der Nullstellensatz nach Hoheisels Methode bewiesen unter Benutzung der Resultate von § 2 und § 3; er lautet:

$$N_f(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{1-\vartheta}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{5-\vartheta-4\sigma}{2(1-\vartheta)}}\right)$$

für $\sigma_0 > \mathrm{Max}(\frac{1}{2}, \vartheta)$ und basiert auf folgendem Grundgedanken: Mit passendem Z wird die Funktion

$$\Phi(s) = f(s) \cdot \sum_1^Z b_n \cdot n^{-s} = \sum_1^\infty a_n \cdot n^{-s} \cdot \sum_1^Z b_m \cdot m^{-s}$$

gebildet, wobei

$$\sum_1^\infty a_n \cdot n^{-s} \cdot \sum_1^\infty b_m \cdot m^{-s} \equiv 1$$

ist; für den Ausdruck

$$N_\Phi^*(\sigma_1, T) = \int_{\sigma_1}^\infty N_\Phi(\sigma_0, T) \cdot d\sigma_0$$

gilt nach Hoheisel

$$2\pi \cdot N_\Phi^*(\sigma_1, T) \leqq \frac{T-2}{2} \cdot \log\left\{\frac{1}{T-2} \cdot \int_2^T |\Phi(\sigma_1 + it)|^2 \cdot dt\right\} + \int_{\sigma_1}^\infty \arg \Phi(\sigma + iT)\, d\sigma - \int_{\sigma_1}^\infty \arg \Phi(\sigma + i2)\, d\sigma.$$

Die beiden letzten Integrale werden sehr einfach vermöge Satz 2 (§ 3), das erste mittels Satz 1 (§ 2) abgeschätzt. Der Übergang zu N_f selbst erfolgt dann ohne Schwierigkeit.

In § 5 wird gezeigt werden, daß die Voraussetzungen des Nullstellensatzes für die Dedekindschen ζ_K-Funktionen und alle Dirichletschen L_K-Reihen in algebraischen Körpern K erfüllt sind, und daß sich daher für sie der Nullstellensatz zu

$$N(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\sigma_0(k+1)\left(2\sigma_0-2+\frac{1}{k+1}\right)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2}(k+1)\left(2\sigma_0-2+\frac{1}{k+1}\right)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{\frac{1}{2}-(k+1)(1-\sigma_0)+\varepsilon}\right)$$

gestaltet, wo k der Grad des betreffenden Körpers ist.

Für die Dirichletschen L-Reihen im rationalen Zahlenkörper gilt dieselbe Nullstellenformel, wie sie der Carlsonsche Satz für $\zeta(s)$ ausspricht. Mit Hilfe dieses und der obigen Nullstellensätze über $L(s, \varkappa)$ lassen sich — speziell in denjenigen algebraischen Zahlenkörpern K, in denen $\zeta_K(s)$ als Produkt von L-Funktionen des rationalen Körpers darstellbar ist — die zahlentheoretischen Anwendungen, die Hoheisel („Primzahlprobleme in der Analysis", Sitzungsber. d. preuß. Akad. 1930, S. 9) auf die Verteilung der Primzahlen macht, auch ausführen für die Verteilung der Primideale in den betreffenden Zahlenkörpern. Das soll jedoch einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

§ 2.

Satz 1: Abschätzung von $f(s) - \sum_1^N \frac{a_n}{n^s}$.

Sei die Dirichletsche Reihe $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ für $\sigma > \sigma_0$ konvergent und $f(s)$ die durch sie bestimmte analytische Funktion, also

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \quad \text{für} \quad \sigma > \sigma_0;$$

sei

$$R(m) = \sum_{n=1}^{m} (a_n - A) = O(m^\vartheta) \tag{1}$$

mit $\vartheta < 1$.

Dann ist zunächst nur für $\sigma > \text{Max}\ (\sigma_0, 1)$

$$f(s) - \sum_1^N \frac{a_n}{n^s} = \sum_{N+1}^\infty \frac{a_n - A}{n^s} + A \cdot \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{N+1}^\infty \frac{a_n - A}{n^s} + A \cdot \left(\zeta(s) - \sum_1^N \frac{1}{n^s}\right); \tag{2}$$

der erste Summand der rechten Seite wird durch Abelsche partielle Summation zunächst für $\sigma > \text{Max}\ (\sigma_0, 1)$ zu

$$\sum_{N+1}^\infty \frac{a_n - A}{n^s} = \sum_{N+1}^\infty \frac{R(n) - R(n-1)}{n^s} = \sum_{N+1}^\infty R(n) \cdot \left\{\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right\} - \frac{R(N)}{(N+1)^s},$$

oder, wenn man die Summe rechts als Treppenintegral interpretiert,

$$\sum_{N+1}^\infty \frac{a_n - A}{n^s} = s \cdot \int_{N+1}^\infty \frac{R([x])}{x^{s+1}} \cdot dx - \frac{R(N)}{(N+1)^s}. \tag{3}$$

Dieses Integral ist aber wegen (1) für $\sigma > \vartheta$ konvergent und genügt dort der Ungleichung

$$\int_{N+1}^\infty \frac{R([x])}{x^{s+1}} \cdot dx = O\left(\int_{N+1}^\infty x^{\vartheta - \sigma - 1}\, dx\right) = O(N^{\vartheta - \sigma}). \tag{4}$$

(3) setzt also die Reihe $\sum_{N+1}^{\infty} \frac{a_n - A}{n^s}$ fort über $\sigma > \mathrm{Max}\ (\sigma_0, 1)$ hinaus bis $\sigma > \vartheta$. Nun ist $\zeta(s) - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s}$ in der ganzen Ebene außer in $s = 1$ regulär und genügt in $\sigma > 0$, $|t| < 2\pi BN$ mit $B < 1$ der Gleichung (Hardy-Littlewood, Math. Zeitschr. **10**, S. 163)

$$\zeta(s) - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} + O(N^{-\sigma}). \tag{5}$$

Also wird (2) durch (3) und (5) fortgesetzt bis zu $\sigma > \mathrm{Max}\ (\vartheta, 0)$ und erhält dort die Gestalt

$$f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_{N+1}^{\infty} \frac{R([x])}{x^{s+1}}\, dx - \frac{R(N)}{(N-1)^s} + A \cdot \left\{ \zeta(s) - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s} \right\}. \tag{6}$$

Es ergibt sich hieraus, da die rechte Seite außer in $s = 1$ in ganz $\sigma > \mathrm{Max}\ (\vartheta, 0)$ regulär ist, daß $f(s)$ ebenfalls in $\sigma > \mathrm{Max}\ (\vartheta, 0)$ regulär ist bis auf den einfachen Pol $s = 1$ mit dem Residuum A. Wegen (4) und (5) genügt $f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^s}$ mithin für $\sigma > \mathrm{Max}\ (\vartheta, 0)$ in $|t| < 2\pi BN$ mit $B < 1$ der Gleichung

$$\begin{aligned} f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n^s} &= O(t \cdot N^{\vartheta - \sigma}) + O(N^{\vartheta - \sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma}) + O(N^{-\sigma}), \\ f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n^s} &= O(t \cdot N^{\vartheta - \sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma}) + O(N^{-\sigma}). \end{aligned} \tag{7}$$

Es gilt also

Satz 1. *Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebig komplex, ist*

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n - A) = O(m^{\vartheta})$$

mit $\vartheta < 1$; ist die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ in $\sigma > \sigma_0$ konvergent, und $f(s)$ die durch die Reihe bestimmte analytische Funktion, so ist $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > \mathrm{Max}\,(\vartheta, 0)$ singularitätenfrei bis auf den einfachen Pol $s = 1$ mit dem Residuum A; und es gilt für $t \to \infty$, $N \to \infty$, $|t| < 2\pi BN$ mit $B < 1$ für jedes σ in $\sigma > \mathrm{Max}\,(\vartheta, 0)$

$$f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = O(t \cdot N^{\vartheta - \sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma}) + O(N^{-\sigma}).$$

Insbesondere erhält man für $N = \left[t^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]$

$$f(s) - \sum_{1}^{\left[t^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{a_n}{n^s} = O\left(t^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}}\right) + O\left(t^{-\frac{2\sigma}{1-\vartheta}}\right)$$

gültig für $\sigma > \mathrm{Max}(\vartheta, 0)$.

Daß dieses Resultat bedeutend schlechter ist als das entsprechende bei der Zetafunktion, darf uns nicht wundernehmen, folgt doch aus der approximativen Funktionalgleichung von $\zeta^2(s)$, dem bisher besten Resultat über $\zeta^2(s)$ (Titchmarsh, Zetafunktion, S. 41), nur

$$\zeta^2(s) - \sum_{1}^{[t^2]} \frac{d(n)}{n^s} = O(t^{\frac{3}{4}-2\sigma} \cdot \log t).$$

Nur in folgendem besonderen Falle verbessert sich das Resultat (7) wesentlich. Sei etwa $\Re R([x]) \geqq 0$, $\Im R([x]) \geqq 0$ für $x \geqq N+1$ und ferner dort für ein bestimmtes $\sigma_1 > 0$, und dann natürlich erst recht für alle $\sigma > \sigma_1$, $x^{-\sigma}\Re R([x])$ und $x^{-\sigma}\Im R([x])$ monoton fallend. Dann ist der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung für $\sigma \geqq \sigma_1$ anwendbar auf die vier Teilintegrale, die durch Trennung von $R([x])$ und x^{-s-1} in Real- und Imaginärteil entstehen; sie sind alle von ähnlichem Bau; wir führen daher die Rechnung nur für eins von ihnen durch:

$$s \cdot \int_{N+1}^{\infty} x^{-\sigma-1} \cdot \Re R([x]) \cdot \cos(t \cdot \log x)\, dx = \frac{s}{t} \cdot \int_{t \cdot \log(N+1)}^{\infty} x^{-\sigma} \cdot \Re R([x]) \cdot \cos y \cdot dy$$

$$= \frac{s}{t} \cdot (N+1)^{-\sigma} \cdot \Re R(N+1) \cdot \int_{t \cdot \log(N+1)}^{\infty} \cos y \cdot dy = O(N^{\vartheta-\sigma});$$

also folgt

$$s \cdot \int_{N+1}^{\infty} R([x]) \cdot x^{-s-1} \cdot dx = O(N^{\vartheta-\sigma}),$$

und (7) verbessert sich dann zu

$$f(s) - \sum_{1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = O(N^{\vartheta-\sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma}) + O(N^{-\sigma}).$$

Dasselbe ist natürlich der Fall, wenn statt der ersten Voraussetzung $\Re R([x]) \leqq 0$ und $x^{-\sigma_1} \cdot \Re R([x])$ monoton steigend, oder statt der zweiten $\Im R([x]) \leqq 0$ und $x^{-\sigma_1} \cdot \Im R([x])$ monoton wachsend angenommen wird. Jede dieser Voraussetzungen über Monotonität ist aber wegen der Sprungstellen von $R([x])$

$$R(n-0) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - A), \quad R(n+0) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - A) = R(n-0) + a_n - A$$

dann und nur dann erfüllt, wenn $\Re R([x])$ usw. sie selbst erfüllen. So erhalten wir zu Satz 1 den Zusatz:

Satz 1a. *Seien* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *beliebig komplex,*

$$R(m) = \sum_{n=1}^{m} (a_n - A) = O(m^{\vartheta})$$

mit $\vartheta < 1$; *seien für* $n \geqq N+1$ $\Re R(n)$ *und* $\Im R(n)$ *von konstantem Vorzeichen und ferner* $\Re R(n)$ *und* $\Im R(n)$ *monoton fallende Folgen. Sei ferner* $f(s)$ *die durch die* (*in* $\sigma > 1 + \vartheta$ *konvergente*) *Reihe* $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *bestimmte analytische Funktion; dann gilt für* $\sigma > \mathrm{Max}(\vartheta, 0)$, $|t| \to \infty$, $N \to \infty$, $|t| < 2\pi B N$ *mit* $B < 1$

$$f(s) - \sum_1^N \frac{a_n}{n^s} = O(N^{\vartheta - \sigma}) + O(t^{-1} \cdot N^{1-\sigma}) + O(N^{-\sigma}).$$

Für $N = \left[|t|^{\frac{1}{1-\vartheta}} \right]$ erhält man in diesem Falle

$$f(s) - \sum_1^{\left[t^{\frac{1}{1-\vartheta}} \right]} \frac{a_n}{n^s} = O\left(t^{-\frac{\sigma-\vartheta}{1-\vartheta}}\right) + O\left(t^{-\frac{\sigma}{1-\vartheta}}\right).$$

§ 3.

Satz 2: Abschätzung von $\arg f(s)$ nach Backlund.

Sei wieder $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebig komplex,

$$a_n = O(n^{\varepsilon}) \quad (a_1 \neq 0) \tag{1}$$

mit jedem $\varepsilon > 0$ und $f(s)$ diejenige analytische Funktion, die in $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$f(s) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (\sigma > 1) \tag{2}$$

dargestellt wird. Wir nehmen überdies ohne Einschränkung der Allgemeinheit einfachheitshalber

$$a_1 = 1$$

an. Es soll dann das Argument der Funktion eindeutig definiert werden. Nun ergeben die Voraussetzungen, daß gleichmäßig in $-\infty < t < +\infty$

$$\lim_{\sigma \to \infty} f(\sigma + it) = 1$$

ist. Es kann also dem Argument dieses Grenzwertes, das ja unendlich vieldeutig ist, irgendein ganzes Vielfaches von 2π als Wert erteilt werden.

Wir greifen für das Folgende stets den Wert 0 heraus, bestimmen also

$$\lim_{\sigma \to \infty} \arg f(\sigma + it) = 0. \tag{3}$$

Das Argument einer Funktion wird, wenn es irgendwie festgelegt ist, unbestimmt nur in den Nullstellen der Funktion. Durch (3) ist daher für die Horizontalen $t = \text{konst.}$, soweit sie von rechts her nullstellenfrei sind, durch stetige Fortsetzung das Argument eindeutig festgelegt. Für die isolierten Nullstellen $\sigma + it$ wird

$$\arg f(\sigma + it) = \lim_{\delta \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \{\arg f(\sigma + it + i\delta) + \arg f(\sigma + it - i\delta)\}$$

definiert. Auf diese Weise ist das Argument überall eindeutig und stetig definiert.

Nun suchen wir, dieses Argument für $t \to \infty$ abzuschätzen. Sei $\sigma_1 > 1$ eine später noch genauer zu bestimmende reelle Zahl. Sei $q(\sigma_0, t_0)$ die Anzahl der Nullstellen von $\Re f(s)$ auf den Strecken $\sigma_1 \dots \sigma_1 + it_0 \dots \sigma_0 + it_0$. Das Argument einer Funktion beträgt nun ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, wenn der Realteil der Funktion verschwindet. Die Strecke mit den q Nullstellen von $\Re f(s)$ besteht also aus $q+1$ Abschnitten, in deren jedem das eindeutige Argument von $f(s)$ höchstens um π variieren kann. Daher wird die Variation des Arguments in $\sigma_1 \dots \sigma_0 + it_0$

$$|\Delta \arg f(\sigma_0 + it_0)| = |\arg f(\sigma_1) - \arg f(\sigma_0 + it_0)| \leqq (q+1) \cdot \pi. \tag{4}$$

Nun suchen wir, σ_1 so zu bestimmen, daß auf $\sigma_1 \dots \sigma_1 + it_0$ keine Nullstelle von $\Re f(s)$ liege. Wegen $\sigma_1 > 1$ ist in $\sigma_1 + it$ $f(s)$ durch die Reihe dargestellt und daher

$$\begin{aligned} |\Re f(\sigma_1 + it)| &= \Big| \sum_1^\infty n^{-\sigma_1} \cdot \{\Re a_n \cdot \cos(t \log n) + \Im a_n \cdot \sin(t \cdot \log n)\} \Big| \\ &\geqq 1 - \sum_1^\infty |a_n| \cdot n^{-\sigma_1}. \end{aligned}$$

Nach (1) kann man eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ angeben, so daß für alle n

$$|a_n| < \frac{5}{\pi^2 - 6} \cdot n^{\varepsilon_0}$$

gilt. Wählt man nun

$$\sigma_1 > 2 + \varepsilon_0,$$

so ergibt sich

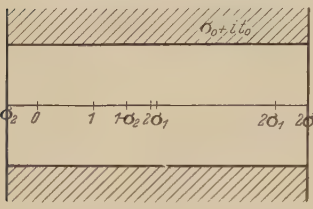
$$\sum_2^\infty |a_n| \cdot n^{-\sigma_1} < \frac{5}{\pi^2 - 6} \cdot \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{5}{\pi^2 - 6} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = \frac{5}{6},$$

und mithin

$$|\Re f(\sigma_1 + it)| \geqq \frac{1}{6}$$

für alle t. Die Gerade $\sigma = \sigma_1$ ist also bei dieser Wahl von σ_1 völlig frei von Nullstellen von $\Re f(s)$. Daher ist dann in (4) q = Anzahl der Nullstellen von $\Re f(s)$ in $\sigma_1 + it_0 \dots \sigma_0 + it_0$.

Nun machen wir die weitere Voraussetzung, daß die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_2$ von endlicher Ordnung bezüglich t sei, d. h. für $\sigma \geqq \sigma_2$



$$f(\sigma + it) = O(t^{\alpha(\sigma)}) \tag{6}$$

mit endlichem $\alpha(\sigma)$ gelte. Im Konvergenzbereich $\sigma > 1$ ist dies bekanntlich erfüllt; wir setzen also

$$\sigma_2 < 1 \tag{7}$$

voraus. Diese Voraussetzung besagt gleichzeitig, daß es eine Ordinate T_0 gibt, so daß $f(s)$ in $\sigma \geqq \sigma_2$, $|t| \geqq T_0$ singularitätenfrei ist (außer im Punkte Unendlich). Nun beschränken wir $\sigma_0 + it_0$ auf das Gebiet

$$\sigma_2 \leqq \sigma_0 \leqq 2\sigma_1 - \sigma_2, \qquad |t_0| > T_0 + \sigma_1 - \sigma_2. \tag{8}$$

Dann erhält man durch konforme Abbildung

$$\begin{aligned} q &= \text{Anzahl der Nullstellen von } \Re f(s) && \text{in } \sigma_1 + it_0 \dots \sigma_0 + it_0 \\ &\leqq \text{Anzahl der Nullstellen von } \Re f(s) && \text{in } \sigma_2 + it_0 \dots 2\sigma_1 - \sigma_2 + it_0 \\ &= l = \text{Anzahl der Nullstellen von } \Re f(s + \sigma_1 + it_0) && \text{in } \sigma_2 - \sigma_1 \dots \sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned}$$

Nun ist für reelle $s > 1 - \sigma_1$

$$\Re f(s + \sigma_1 + it_0) = \sum_1^\infty n^{-(s+\sigma_1)} \cdot \{\Re a_n \cdot \cos(t_0 \cdot \log n) + \Im a_n \cdot \sin(t_0 \cdot \log n)\}.$$

Bezeichnen wir genauer die mit a_n gebildete Reihe $f(s)$ als $f(s, a)$ und entsprechend die mit den konjugiert komplexen $\bar{a}_n$ gebildete Reihe mit $f(s, \bar{a})$, so gilt

$$\begin{aligned} &\Re f(\sigma_1 + it_0 + s, a) + \Re f(\sigma_1 - it_0 + s, \bar{a}) \\ &\quad = 2 \cdot \sum_1^\infty n^{-(\sigma_1+s)} \cdot \{\Re a_n \cdot \cos(t_0 \cdot \log n) + \Im a_n \cdot \sin(t_0 \cdot \log n)\} \\ &\quad = 2 \cdot \Re f(s + \sigma_1 + it_0), \\ &\Im f(\sigma_1 + it_0 + s, a) + \Im f(\sigma_1 - it_0 + s, \bar{a}) = 0; \end{aligned}$$

also

$$\Re f(s + \sigma_1 + it_0) = f^*(s), \tag{9}$$

wo $f^*(s)$ für komplexe s die analytische Funktion

$$f^*(s) = \frac{1}{2} \cdot \{f(s + \sigma_1 + it_0, a) + f(s + \sigma_1 - it_0, \bar{a})\} \tag{10}$$

bedeutet. Nun sind nach (6) $f(s+\sigma_1+it_0)$ und $f^*(s)$ für s reell und $s \geqq \sigma_2 - \sigma_1$ regulär, wenn wir auch für $f(s, \bar{a})$ Gleichung (6) voraussetzen; daher folgt aus der Realität von $f^*(s)$ auf der reellen Achse für $s > 1 - \sigma_1$ die Realität und die Geltung von (9) bis $s \geqq \sigma_2 - \sigma_1$. So wird l auf die Nullstellenanzahl von $f^*(s)$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} l &= \text{Anzahl der Nullstellen von } f^*(s) \text{ in } \sigma_2 - \sigma_1 \ldots \sigma_1 - \sigma_2 \\ &\leqq \text{Anzahl der Nullstellen von } f^*(s) \text{ in } |s| \leqq \sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned}$$

Nun gilt für die Anzahl $l(\eta)$ der Nullstellen von $f^*(s)$ im Kreise $|s| \leqq \eta + 1$ die Jensensche Formel

$$l(\eta) < \frac{\log \left| \frac{\underset{|s|=\eta}{\operatorname{Max}} |f^*(s)|}{|f^*(0)|} \right|}{\log \frac{1}{\eta}}.$$

$f^*(0)$ ist nach oben und unten beschränkt:

$$|f^*(0)| = |\Re f(\sigma_1 + it_0)| = \left| \sum_1^\infty n^{-\sigma_1} \cdot \{\Re a_n \cdot \cos(t_0 \cdot \log n) + \Im a_n \cdot \sin(t_0 \cdot \log n)\} \right|,$$

$$|f^*(0)| \leqq \sum_1^\infty |a_n| \cdot n^{-\sigma_1} \leqq \frac{5}{\pi^2 - 6} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2 - 6},$$

$$|f^*(0)| \geqq 1 - \sum_2^\infty |a_n| \cdot n^{-\sigma_1} \geqq 1 - \frac{5}{\pi^2 - 6} \cdot \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

Ferner ist wegen (6)

$$\begin{aligned} \underset{|s|=\sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f^*(s)| &\leqq \underset{|s|=\sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f(s+\sigma_1+it_0, a)| + \underset{|s|=\sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f(s+\sigma_1-it_0, \bar{a})| \\ &= \underset{|s-\sigma_1-it_0| \leqq \sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f(s, a)| + \underset{|s-\sigma_1+it_0| \leqq \sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f(s, \bar{a})| = O(|t_0|^\beta) \end{aligned}$$

mit endlichem

$$\beta = \underset{\sigma_2 \leqq \sigma \leqq 2\sigma_1 - \sigma_2}{\operatorname{Max}} \alpha(\sigma).$$

Man erhält also damit

$$\log \underset{|s|=\sigma_1-\sigma_2}{\operatorname{Max}} |f^*(s)| = O(\log |t_0|)$$

und

$$l(\sigma_1 - \sigma_2) = O(\log |t_0|).$$

Wir haben also für $s_0 = \sigma_0 + it_0$ in (8)

$$q \leqq l = O(\log |t_0|)$$

und damit

$$|\arg f(\sigma_0 + it_0)| = O(\log |t_0|) \tag{11}$$

bewiesen. Es gilt also

Satz 2. *Seien* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *beliebig komplex,*

$$a_1 \neq 0, \qquad a_n = O(n^\varepsilon)$$

mit jedem $\varepsilon > 0$. *Sei* $f(s) = f(s, a)$ *die durch die Reihe*

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

dargestellte analytische Funktion und entsprechend

$$f(s, \bar{a}) = \sum_1^\infty \frac{\bar{a}_n}{n^s}.$$

Seien $f(s, a)$ *und* $f(s, \bar{a})$ *in der Halbebene* $\sigma \geqq \sigma_2$, *wo* $\sigma_2 < 1$ *ist, von endlicher Größenordnung bezüglich* t, *d. h. mit endlichem* α

$$f(s, a) = O(t^\alpha), \qquad f(s, \bar{a}) = O(t^\alpha).$$

Dann gibt es eine feste Zahl $\varepsilon_0 > 0$, *so daß für jedes* $\sigma_1 > 2 + \varepsilon_0$ *gleichmäßig in jedem Streifen* $\sigma_2 \leqq \sigma \leqq 2\sigma_1 - \sigma_2$

$$\arg f(\sigma + it) = O(\log |t|)$$

gilt.

Im besonderen Falle, daß die Koeffizienten von einem Index ab alle verschwinden, also die Reihe sich auf eine endliche Summe reduziert, ist überall „Konvergenz" vorhanden, also die Voraussetzung (6) überflüssig und für jedes σ_2 erfüllt.

§ 6.

Nullstellensatz.

Sei

$$a_1 \neq 0, \qquad a_n = O(n^\varepsilon), \qquad b_n = O(n^\varepsilon) \tag{1}$$

für jedes $\varepsilon > 0$; sei

$$\sum_1^m (a_n - A) = O(m^\vartheta) \tag{2}$$

mit einer festen Zahl ϑ in $0 < \vartheta < 1$. Sei $f(s)$ die durch die Reihe $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^\varepsilon}$ bestimmte Funktion und $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s}$ die reziproke Funktion

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}, \qquad \frac{1}{f(s)} = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s}, \qquad \sigma > 1. \tag{3}$$

Seien sowohl die mit den a_n gebildete Funktion $f(s) = f(s, a)$ als auch

die mit $\bar{a}_n$ gebildete $f(s, \bar{a})$ in $\sigma \geqq \vartheta$ von endlicher Größenordnung in bezug auf t, also

$$f(s, a) = O(t^{\alpha}), \qquad f(s, \bar{a}) = O(t^{\alpha}), \qquad \sigma \geqq \vartheta \tag{4}$$

mit endlichem $\alpha(\sigma)$.

Aus Satz 1 folgt dann, daß $f(s)$ in $\sigma > \vartheta$ außer $s = 1$ keine Singularitäten hat und der Gleichung

$$f(s) - \sum_{1}^{\left\lfloor t^{\frac{2}{1-\vartheta}} \right\rfloor} \frac{a_n}{n^s} = O\left(t^{\frac{1+\vartheta-2\alpha}{1-\vartheta}}\right) \tag{5}$$

genügt. Dasselbe gilt für $f(s, \bar{a})$, da aus (2) von selbst sich

$$\sum_{1}^{m} (\bar{a}_n - \bar{A}) = O(m^{\vartheta})$$

ergibt. Ferner erfüllen auch $f(s, a)$ und $f(s, \bar{a})$ die Voraussetzungen von Satz 2; dieselben werden auch von den Funktionen

$$\varphi(s) = \varphi(s, a) = \sum_{1}^{Z} b_n \cdot n^{-s}, \qquad \varphi(s, \bar{a}) = \sum_{1}^{Z} \bar{b}_n \cdot n^{-s}$$

erfüllt, wo Z einstweilen beliebig ist. Mithin ist also für

$$\begin{aligned} &\Phi(s) = \Phi(s, a) = f(s) \cdot \varphi(s), \qquad \Phi(s, \bar{a}) = f(s, \bar{a}) \cdot \varphi(s, \bar{a}), \\ &\arg \Phi(\sigma + it) = O(\log |t|), \qquad \arg \Phi(\sigma + it, \bar{a}) = O(\log |t|). \end{aligned} \tag{6}$$

Sei $N_{\Phi}(\sigma_0, T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\Phi(s)$ im Gebiet $\sigma > \sigma_0$, $2 < |t| < T$ und

$$N_{\Phi}^{*}(\sigma_1, T) = \int_{\sigma_1}^{\infty} N_{\Phi}(\sigma_0, T) \cdot d\sigma_0 .$$

Dann gilt allgemein (siehe Hoheisel), wenn nur (6) erfüllt ist und in jedem Parallelstreifen um die reelle Achse genügend stark

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\Phi'(\sigma + it)}{\Phi(\sigma - it)} = 0$$

ist, für $\sigma_1 > \vartheta$

$$2\pi \cdot N_{\Phi}^{*}(\sigma_1, T) \leqq \frac{T-2}{2} \cdot \log \left\{ \frac{1}{T-2} \cdot \int_{2}^{T} |\Phi(\sigma_1 + it)|^2 \cdot dt \right\} + O(\log T). \tag{7}$$

Wir nehmen nun im folgenden Z als wachsend mit T, aber

$$Z < T^{O(1)} \tag{8}$$

an. Die Aufgabe konzentriert sich durch (7) darauf, $|\Phi(\sigma + it)|^2$ für

$\sigma > \vartheta$ abzuschätzen. Wir setzen (5) in Φ ein:

$$\Phi(\sigma+it) = \left\{ \sum_1^{\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{a_n}{n^s} + O\left(t^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}}\right)\right\} \cdot \sum_1^Z \frac{b_m}{m^s}$$

$$= \sum_1^{Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{e(n)}{n^s} + O\left(t^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}}\right) \cdot \sum_1^Z \frac{b_m}{m^s}.$$

Dabei sind die Koeffizienten

$$(9) \quad e(n) = \sum_{\frac{n}{\left[t^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \leqq q \leqq Z}^{q|n} b_q \cdot a_{\frac{n}{q}} = O\left(\sum_{q|n}^{1,\ldots,n} n^{\frac{\varepsilon}{2}}\right) = O\left(n^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot d(n)\right) = O(n^{\varepsilon})$$

Funktionen von t. Für $2 \leqq n \leqq Z$ ist in $\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right] \geqq n$

$$(10) \qquad e(n) = \sum_{1 \leqq q \leqq n}^{q|n} b_q \cdot a_{\frac{n}{q}} = 0,$$

da ja a_n, b_n Koeffizienten zweier reziproker Dirichletscher Reihen sind. Wegen (1) ist für $\sigma < 1$

$$\sum_1^Z \frac{b_m}{m^s} = O\left(\sum_1^Z m^{\varepsilon-\sigma}\right) = O(Z^{1-\sigma+\varepsilon}),$$

also

$$\Phi(\sigma+it) = \sum_1^{Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{e(n)}{n^s} + O\left(|t|^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}} \cdot Z^{1-\sigma+\varepsilon}\right).$$

Die analoge Gleichung gilt für $\Phi(s, \bar{a})$:

$$\Phi(\sigma+it, \bar{a}) = \sum_1^{Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{\overline{e(n)}}{n^s} + O\left(|t|^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}} \cdot Z^{1-\sigma+\varepsilon}\right).$$

Nun ist

$$\Phi(\sigma+it, a) = \Phi(\sigma-it, \bar{a}),$$

also

$$|\Phi(\sigma+it)|^2 = \Phi(\sigma+it, a) \cdot \overline{\Phi(\sigma+it, a)} = \Phi(\sigma+it, a) \cdot \Phi(\sigma-it, \bar{a})$$

$$= \sum_{n,m}^{1,\ldots,Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{e(n)\cdot\overline{e(m)}}{(n\cdot m)^\sigma} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{it} + O\left(|t|^{\frac{2+2\vartheta-4\sigma}{1-\vartheta}} \cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right)$$

$$+ O\left(|t|^{\frac{1+\vartheta-2\sigma}{1-\vartheta}} \cdot Z^{1-\sigma+\varepsilon}\right) \cdot \sum_1^{Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \left(\frac{e(n)}{n^s} + \frac{\overline{e(n)}}{n^s}\right)$$

$$= \sum_{\substack{n,\,m \\ 1,\ldots,Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}} \frac{e(n)\cdot\overline{e(m)}}{(n\cdot m)^{\sigma}}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{it} + O\left(|t|^{\frac{2+2\vartheta-4\sigma}{1-\vartheta}}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right)$$

$$+ O\left(|t|^{\frac{3-4\sigma+\vartheta+\varepsilon}{1-\vartheta}}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right)$$

$$= \sum_{\substack{n,\,m \\ 1,\ldots,Z\cdot\left[|t|^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}} \frac{e(n)\cdot\overline{e(m)}}{(n\cdot m)^{\sigma}}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{it} + O\left(|t|^{\frac{3-4\sigma+\vartheta+\varepsilon}{1-\vartheta}}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right).$$

Mithin liefert Integration für $\vartheta < \sigma < 1$

$$\frac{1}{T}\cdot\int_0^T |\Phi(\sigma+it)|^2\cdot dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \sum_{n,\,m}\ldots dt + O\left(T^{-1}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\cdot\int_0^T t^{\frac{3-4\sigma+\vartheta+\varepsilon}{1-\vartheta}}\cdot dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \sum_{n,\,m}\ldots dt + O\left(T^{\frac{3-4\sigma+\vartheta+\varepsilon}{1-\vartheta}}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right).$$

Das Integral über die Doppelsumme wird aufgespalten

$$\int_0^T \sum_{n,\,m}\ldots dt = \sum_{n=1}^{Z\cdot\left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{1}{n^{2\sigma}}\cdot\int_0^T |e(n)|^2\cdot dt + \sum_{\substack{1,\ldots,Z\cdot\left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right] \\ n\neq m}} \frac{1}{(n\cdot m)^{\sigma}}\cdot\int_0^T e(n)\cdot\overline{e(m)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{it}\cdot dt.$$

Genau wie bei Hoheisel ist für $n \neq m$

$$\left|\int_0^T e(n)\cdot\overline{e(m)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{it}\cdot dt\right| = \left|\int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it}\cdot\left\{\sum_{\substack{\frac{n}{\left[t^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}\leqq q\leqq Z \\ \frac{m}{\left[t^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}\leqq r\leqq Z}}^{q/n\ r/m} a_{\frac{n}{q}}\cdot b_q\cdot\overline{a}_{\frac{m}{r}}\cdot\overline{b}_r\right\} dt\right|$$

$$= \left|\sum_{q/n\ r/m}^{1,\ldots,Z} a_{\frac{n}{q}}\cdot b_q\cdot\overline{a}_{\frac{m}{r}}\cdot\overline{b}_r\cdot\int_{T_{q,r}^{n,m}}^{T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}\cdot dt\right| < \frac{2}{\left|\log\frac{m}{n}\right|}\cdot\sum_{q/n\ r/m}^{1,\ldots,Z}\left|a_{\frac{n}{q}}\cdot b_q\cdot\overline{a}_{\frac{m}{r}}\cdot\overline{b}_r\right| = O\left(\frac{(m\cdot n)^{\varepsilon}}{\left|\log\frac{m}{n}\right|}\right),$$

also

$$\sum_{\substack{m\neq n \\ 1,\ldots,Z\cdot\left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}} \frac{1}{(m\cdot n)^{\sigma}}\cdot\int_0^T e(n)\cdot\overline{e(m)}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{it}\cdot dt = O\left(\sum_{\substack{m\neq n \\ 1,\ldots,Z\cdot\left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]}} \frac{(m\cdot n)^{\varepsilon-\sigma}}{\left|\log\frac{m}{n}\right|}\right)$$

$$= O\left(T^{\frac{4-4\sigma+\varepsilon}{1-\vartheta}}\cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}\right).$$

Weiter ist wegen (10) für $2 \leqq n \leqq Z$

$$\int_Z^T |e(n)|^2 \cdot dt = 0,$$

also

$$\int_0^T |e(n)|^2 \cdot dt = \int_0^Z |e(n)|^2 \cdot dt = O(n^\varepsilon \cdot Z).$$

Mithin erhält man für $\operatorname{Max}(\frac{1}{2}, \vartheta) < \sigma < 1$

$$\sum_1^{Z \cdot \left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{1}{n^{2\sigma}} \cdot \int_0^T |e(n)|^2 \cdot dt$$

$$= T + \sum_{n=2}^{Z} \frac{1}{n^{2\sigma}} \cdot \int_0^Z |e(n)|^2 \cdot dt + \sum_{Z+1}^{Z \cdot \left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} \frac{1}{n^{2\sigma}} \cdot \int_0^T |e(n)|^2 \cdot dt$$

$$= T + O\left(Z \cdot \sum_1^Z n^{\varepsilon - 2\sigma}\right) + O\left(T \cdot \sum_{Z+1}^{Z \cdot \left[T^{\frac{2}{1-\vartheta}}\right]} n^{\varepsilon - 2\sigma}\right)$$

$$= T + O(Z^{2-2\sigma+\varepsilon}) + O(Z) + O(T \cdot Z^{1-2\sigma+\varepsilon}).$$

So ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sum_{n,m} \ldots dt = 1 + O(Z \cdot T^{-1}) + O(T^{-1} \cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}) + O(Z^{1-2\sigma+\varepsilon}) + O\left(Z^{2-2\sigma+\varepsilon} \cdot T^{\frac{3+\vartheta-4\sigma+\varepsilon}{1-\vartheta}}\right)$$

und damit

$$(11) \quad \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |\Phi(\sigma + it)|^2 \cdot dt = 1 + O(Z \cdot T^{-1}) + O(T^{-1} \cdot Z^{2-2\sigma+\varepsilon}) + O(Z^{1-2\sigma+\varepsilon}) + O\left(Z^{2-2\sigma+\varepsilon} \cdot T^{\frac{3+\vartheta-4\sigma+\varepsilon}{1-\vartheta}}\right).$$

Setzt man hierin endlich

$$Z = \left[T^{\frac{4\sigma-3-\vartheta}{2(1-\vartheta)}}\right]$$

ein, so liefert (11) speziell:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |\Phi(\sigma + it)|^2 \cdot dt = 1 + O\left(T^{-\frac{\sigma}{1-\vartheta}(4\sigma-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{-\frac{\sigma}{2(1-\vartheta)}(4\sigma-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{-\frac{5-\vartheta-4\sigma}{2(1-\vartheta)}+\varepsilon}\right).$$

Genau wie bei Hoheisel resultiert infolgedessen

$$N_\Phi^*(\sigma_1, T) = O\left(T^{1-\frac{\sigma_1}{1-\vartheta}(4\sigma_1-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_1}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_1-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{5-\vartheta-4\sigma_1}{2(1-\vartheta)}+\varepsilon}\right),$$

und daher für $f(s)$

$$N_f(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{1-\vartheta}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{5-\vartheta-4\sigma_0}{2(1-\vartheta)}+\varepsilon}\right).$$

Wir erhalten also den

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen* (1) *bis* (4) *dieses Paragraphen gilt für die Anzahl* $N_f(\sigma_0, T)$ *der Nullstellen von* $f(s)$ *in* $\sigma > \sigma_0$, $2 < |t| < T$, *wenn* $\sigma_0 > \mathrm{Max}\left(\frac{1}{2}, \vartheta\right)$ *ist,*

$$N_f(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{1-\vartheta}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{5-\vartheta-4\sigma_0}{2(1-\vartheta)}+\varepsilon}\right),$$

mit jedem $\varepsilon > 0$.

Für die Dirichletschen L-Reihen im rationalen Körper gilt dagegen genau so wie für $\zeta(s)$ das bessere Resultat

$$N(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-(2\sigma_0-1)^2+\varepsilon}\right)$$

für $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, weil, wie in der Einleitung angedeutet wurde, die approximative Darstellung der von $\zeta(s)$ gleichlautet.

Es ist bedauerlich, daß diese Abschätzung der Nullstellenanzahl, wie sie Satz 3 liefert, für $\vartheta = 0$ nicht in die von $\zeta(s)$ und $L(s)$ geltende, $O\left(T^{1-(2\sigma_0-1)^2+\varepsilon}\right)$, übergeht, sondern in die schlechtere, $O\left(T^{1-\sigma_0(4\sigma_0-3)+\varepsilon}\right)$; das liegt daran, daß schon Satz 1 für $\vartheta = 0$ nicht mit der für $\zeta(s)$ und $L(s)$ geltenden Gleichung (2) der Einleitung zusammenfällt, sondern daß dann noch das Glied $O(t \cdot N^{-\sigma})$ hinzutritt; dieses verdankt man letzten Endes dem Umstande, daß man im Integral

$$s \cdot \int_{N+1}^{\infty} R([x]) \cdot x^{-s-1} \cdot dx$$

im allgemeinen nichts über Monotonität weiß, also nicht wie bei $\zeta(s)$ und $L(s)$ mittels des zweiten Mittelwertsatzes den Faktor s beseitigen kann.

Nur in dem besonderen Fall, daß $\Re R(n)$ und $\Im R(n)$ von konstantem Vorzeichen sind, wenn also Satz 1a gilt, ergibt eine ganz analoge Rechnung den viel besseren Nullstellensatz

$$N(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\frac{(2\sigma_0-1)(2\sigma_0-\vartheta-1)}{1-\vartheta}+\varepsilon}\right),$$

der für $\vartheta = 0$ tatsächlich in das für $\zeta(s)$ und $L(s, \chi)$ geltende Resultat übergeht. Wir erhalten also zu Satz 3 als Ergänzung:

Satz 3a. Gelten die Voraussetzungen von Satz 3 und von Satz 1a (§ 2), so ist

$$N_f(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\frac{(2\sigma_0-1)(2\sigma_0-\vartheta-1)}{1-\vartheta}+\varepsilon}\right)$$

für $\sigma_0 > \mathrm{Max}(\frac{1}{2}, \vartheta)$.

§ 5.

Nullstellensatz für $\zeta_K(s)$ und $L_K(s, \chi)$.

Es soll in diesem Paragraphen endlich nachgewiesen werden, daß die $\zeta_K(s)$ und $L_K(s)$ die Voraussetzungen des Nullstellensatzes 3 erfüllen.

Die Dedekindsche Zeta-Funktion ist im algebraischen Körper K definiert als

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}}' \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{F(n)}{n^s},$$

wo die erste Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ von K summiert wird, also $F(n)$ die Anzahl der Ideale in K mit der Norm n ist. Es ist leicht einzusehen, daß

$$F(n) = O(n^{\varepsilon})$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ gilt. Sei nämlich k der Grad des Körpers. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus K teilt genau eine rationale Primzahl p und hat dann die Norm

$$N\mathfrak{p} = p^f$$

mit

$$1 \leqq f \leqq k.$$

Sind nun $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$ die q Primideale aus K, die ein und dieselbe Primzahl p teilen, ist also

$$N\mathfrak{p}_i = p^{f_i} \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

so folgt

$$Np = p^k = p^{f_1 + \ldots + f_q}.$$

Aus

$$f_1 + \ldots + f_q = k$$

und

$$f_i \geqq 1$$

ergibt sich notwendig

$$q \leqq k.$$

Die Anzahl der Primideale in K, die die gleiche Primzahl teilen, ist also kleiner oder gleich k. Sei nun die rationale Primfaktorenzerlegung von n

$$n = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_e^{l_e}.$$

Soll

$$N\mathfrak{a} = n$$

sein, so müssen die Primidealfaktoren von $\mathfrak{a}$ grade die Primfaktoren von n teilen, also

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{11}^{\alpha_{11}} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{1k}^{\alpha_{1k}} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{\varrho 1}^{\alpha_{\varrho 1}} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{\varrho k}^{\alpha_{\varrho k}}$$

mit

$$\begin{array}{ccc} N\mathfrak{p}_{11} = p_1^{f_{11}} \ldots & & N\mathfrak{p}_{1k} = p_1^{f_{1k}}, \\ \vdots & & \vdots \\ N\mathfrak{p}_{\varrho 1} = p_\varrho^{f_{\varrho 1}} \ldots & & N\mathfrak{p}_{\varrho k} = p_\varrho^{f_{\varrho k}} \end{array}$$

gelten, wo einige der α auch gleich 0 sein können. Damit wirklich

$$(N\mathfrak{a} =) p_1^{f_{11}+\ldots+f_{1k}} \cdot \ldots \cdot p_\varrho^{f_{\varrho 1}+\ldots+f_{\varrho k}} = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_\varrho^{l_\varrho} (= n)$$

sei, müssen also die k Größen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$ jeweils Lösungen der Gleichung

$$f_{i1} \cdot \alpha_{i1} + \ldots + f_{ik} \cdot \alpha_{ik} = l_i$$

sein. Da jede der k Größen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$ höchstens die $l_i + 1$ Zahlen $0, 1, \ldots, l_i$ durchlaufen kann, hat jede solche Gleichung höchstens $(l_i + 1)^k$ verschiedene Lösungssysteme $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$. Die Gesamtanzahl der Lösungssysteme für alle $i = 1, \ldots, \varrho$, das ist $F(n)$, ist also

$$F(n) \leqq (l_1 + 1)^k \cdot \ldots \cdot (l_\varrho + 1)^k = (d(n))^k,$$

wo $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n im rationalen Zahlenkörper ist. Von $d(n)$ ist aber

$$d(n) = O(n^\varepsilon)$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ bekannt. Die Voraussetzung (2) ist nach Landau (Algebr. Zahlen) ebenfalls erfüllt; es gilt nämlich

$$\vartheta = 1 - \frac{2}{k+1},$$

$$\sum_1^m F(n) = h \cdot \lambda \cdot m + O\left(m^{1-\frac{2}{k+1}}\right).$$

Ferner gilt bekanntlich sogar noch über $\sigma = 1 - \frac{2}{k+1}$ hinaus, daß $\zeta_K(s)$ von endlicher Ordnung bezüglich t ist. Da die $F(n)$ reell sind, ist in diesem Falle besonders einfach

$$f(s, a) = f(s, \bar{a}) = \zeta_K(s).$$

Die reziproke Funktion von $\zeta_K(s)$ ist bekanntlich

$$\frac{1}{\zeta_K(s)} = \sum_{\mathfrak{a}}' \frac{\mu(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_1^\infty{}' \frac{b_n}{n^s},$$

wo $\mu(\mathfrak{a})$ die Möbiussche μ-Funktion bedeutet, also

$$\mu(\mathfrak{a}) = 0,$$

wenn $\mathfrak{a}$ durch ein Idealquadrat teilbar ist, und

$$\mu(\mathfrak{a}) = (-1)^{\varrho},$$

wenn $\mathfrak{a}$ aus ϱ verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist. Mithin ist der Koeffizient

$$|b_n| = |\sum_{N\mathfrak{a}=n} \mu(\mathfrak{a})| \leqq F(n) = O(n^{\varepsilon})$$

und Voraussetzung (1) erfüllt.

Die Dirichletschen $L_K(s, \chi)$-Reihen in K sind folgendermaßen definiert. Seien $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_h$ die h Idealklassen von K; für jeden Charakter χ der Abelschen Klassengruppe ist dann die $L_K(s, \chi)$-Reihe definiert durch

$$L_K(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a'_n}{n^s},$$

wo

$$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{k})$$

ist für die Ideale $\mathfrak{a}$ der Klasse $\mathfrak{k}$. Wegen

$$|\chi(\mathfrak{a})| \leqq 1$$

ist wieder

$$|a'_n| \leqq F(n) = O(n^{\varepsilon}).$$

Da nach Landau die Anzahl der Ideale aus der Klasse $\mathfrak{k}$ mit einer Norm kleiner oder gleich m

$$Z(m, \mathfrak{k}) = \lambda \cdot m + O\left(m^{1-\frac{2}{k+1}}\right)$$

ist, wird

$$\sum_{1}^{m} a'_n = \sum_{i=1}^{h} \chi(\mathfrak{k}_i) \cdot Z(m, \mathfrak{k}_i) = \lambda \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{h} \chi(\mathfrak{k}_i) + O\left(m^{1-\frac{2}{k+1}}\right),$$

also

$$\sum_{1}^{m} a'_n = h \cdot \lambda \cdot m + O\left(m^{1-\frac{2}{k+1}}\right),$$

wenn χ der Hauptcharakter ist, und sonst

$$\sum_{1}^{m} a'_n = O\left(m^{1-\frac{2}{k+1}}\right).$$

Wieder ist also Voraussetzung (2) mit $\vartheta = 1 - \frac{2}{k+1}$ erfüllt. Daß in $\sigma > \vartheta$ $L_K(s, \chi)$ von endlicher Größenordnung bezüglich t ist, ist bekannt; auch $f(s, \bar{a})$ ist es, da es stets ebenfalls eine Dirichletsche L-Reihe im selben Körper ist. Die reziproke Funktion ist

$$\frac{1}{L_K(s, \chi)} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a}) \cdot \chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{1}^{\infty} \frac{b'_n}{n^s},$$

und es gilt ebenso

$$|b'_n| \leqq F(n) = O(n^{\varepsilon}).$$

Wir können also das Ergebnis von § 4 für $\zeta_K(s)$ und $L_K(s, \chi)$ zusammenfassen zum

Satz 4. *Ist k der Grad des Körpers K, so gilt für die Anzahl der Nullstellen von*

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}, \qquad L_K(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s}$$

in $\sigma > \sigma_0 > \mathrm{Max}\left(1 - \frac{2}{k+1}, \frac{1}{2}\right)$, $2 < |t| < T$

$$N(\sigma_0, T) = O\left(T^{1-\sigma_0(k+1)\left(2\sigma_0-2+\frac{1}{k+1}\right)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2}(k+1)\left(2\sigma_0-2+\frac{1}{k+1}\right)+\varepsilon}\right) + O\left(T^{\frac{1}{2}-(k+1)(1-\sigma_0)+\varepsilon}\right).$$

Ausschlaggebend ist für kleine σ_0 nur das erste Glied. Das zweite Glied geht ins erste ein, wenn $\sigma_0 \leqq 1 - \frac{1}{2(k+1)}$ ist, das letzte erübrigt sich bereits für $\sigma_0 \leqq \frac{1}{2(k+1)}$.

(Eingegangen am 1. April 1931.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Vierte Abhandlung.

Von

Arnold Walfisz in Radość (Polen).

Es sei

$$Q = \sum_{g,h=1}^{4} a_{gh} n_g n_h \qquad (a_{gh} = a_{hg} \text{ rational}) \tag{1}$$

eine positiv definite quaternäre quadratische Form der Determinante D. Für $x > 0$ stellt dann

$$A(x) = A_Q(x) = \sum_{1 \leqq Q \leqq x} 1$$

die Anzahl aller Gitterpunkte $\neq (0, 0, 0, 0)$ im abgeschlossenen vierdimensionalen Ellipsoid $Q \leqq x$ dar[1]). Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2$$

angenähert. Ich setze zur Abkürzung

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A(x) - \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2.$$

Wie E. Landau[2]) für alle Formen (1) nachgewiesen hat, ist

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x). \tag{2}$$

Nach H. D. Kloosterman[3]) gilt für Diagonalformen

$$Q = a_{11} n_1^2 + a_{22} n_2^2 + a_{33} n_3^2 + a_{44} n_4^2, \tag{3}$$

---

[1]) Ich schließe diesmal, weil es bequem ist, den Nullpunkt aus.

[2]) E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ [Mathematische Zeitschrift **21** (1924), S. 126—132].

[3]) H. D. Kloosterman „Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden“ [Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 519—529].

über (2) hinaus,

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log x). \quad (4)$$ [4])

Noch spezieller für die vierdimensionale Kugel, d. h.

$$Q = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2,$$

habe ich

$$\mathsf{P}(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right) \quad (5)$$

erhalten. [5])

(2) gewinnt Landau durch eine zweckmäßige Modifikation der bekannten analytischen Methode der additiven Zahlentheorie (Fareyzerschneidung). Sein Näherungsausdruck für $\mathsf{P}(x)$ erlaubt bei den Formen (3) eine weitergehende arithmetische Behandlung, die Kloosterman für (4) durchführt. Der Beweis von (5) beruht einerseits auf der bekannten Jacobischen Formel für

$$r_4(n) = \sum_{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=n} 1$$ [6]),

andererseits auf der Anwendung einer mit dem Weylschen Satze aus der Theorie Diophantischer Näherungen operierenden Methode von Hardy-Littlewood-Landau. [7])

In der vorliegenden Abhandlung will ich (5) für alle Formen (1) beweisen. Hierbei dürfen die Koeffizienten a_{gh} als ganzzahlig angenommen werden, weil man dies durch einen trivialen Übergang erreichen kann. Hier gilt kein Analogon des Jacobischen Satzes, und die mit der Fareyzerschneidung gewonnenen Näherungsausdrücke sind bereits für die Formen (3), wie aus einer Reihe Kloostermanscher Untersuchungen hervorgeht, überaus kompliziert. Wohl aber brachte E. Hecke in einer grundlegenden

---

[4]) Da uns im folgenden lediglich der Fall rationaler a_{gh} beschäftigen wird, so sei hier nur kurz darauf hingewiesen, daß E. Landau (1915) für positiv definite Formen (1) mit beliebigen Koeffizienten

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x^{\frac{6}{5}}\right)$$

und V. Jarník (1928) für Formen (3) mit beliebigen positiven Koeffizienten

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x)$$

nachgewiesen haben.

[5]) „Teilerprobleme" [Mathematische Zeitschrift **26** (1927), S. 63—88].

[6]) Diesen Ansatz hatte Landau schon früher zum Beweise von (4) für die vierdimensionale Kugel benutzt. Vgl. „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen" [Göttinger Nachrichten 1912, S. 687—771], S. 765 und loc. cit. 2), S. 127.

[7]) E. Landau „Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen" [Mathematische Zeitschrift **20** (1924), S. 105—125]. Diese Methode ist jetzt durch die Landauschen „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig 1927, im folgenden kurz mit „Vorlesungen" zitiert) leicht zugänglich.

Arbeit [8]) das Ellipsoidproblem mit der von ihm ausgebauten Theorie der Modulformen in Verbindung und erzielte eine so weitgehende Vereinfachung, daß nunmehr der Beweis von (5) für die Formen (1) mit bewährten Mitteln erbracht werden kann.

Es sei N eine, zunächst beliebige, natürliche Zahl. Ich führe die Teilerfunktionen

$$S(x;\alpha,\beta,N)=\sum_{\substack{mn\leqq x\\ m\equiv\alpha,\ n\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ N)}} n \tag{6}$$

ein (falls die unteren Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins). τ bezeichne eine komplexe Veränderliche mit positivem Imaginärteil (die aber keiner weiteren Einschränkung unterliegt).

$$F(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n\tau}{N}} \tag{7}$$

sei die Potenzreihenentwicklung nach $e^{\frac{2\pi i\tau}{N}}$ einer, zunächst beliebigen, ganzen Modulform $F(\tau)$ der Dimension -2 und der Stufe N, die in allen rationalen Spitzen ihres Fundamentalbereiches verschwindet;

$$C(x)=\sum_{n\leqq x} c_n \tag{8}$$

bedeute die zugehörige summatorische Funktion.

Aus den Heckeschen Untersuchungen geht unmittelbar hervor, daß es zu jedem Q ein $N=N(Q)$, eine geeignete lineare Verbindung

$$\Phi(x)=\Phi_Q(x)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} f(\alpha,\beta)\,S(x;\alpha,\beta,N) \tag{9}$$

der Funktionen (6) und eine geeignete Modulform (7) gibt, so daß

$$A(x)=\Phi(Nx)+C(Nx) \tag{10}$$

ist.

Der Ausdruck (9) läßt sich sehr leicht in die Form

$$\Phi(x)=\lambda x^2+O(x\log x), \tag{11}$$

mit einer geeigneten Konstanten $\lambda=\lambda_Q$, bringen (der folgende Hilfssatz 3 leistet schon etwas mehr); für die Funktionen (8) hat aber Hecke

$$C(x)=O(x\log x) \tag{12}$$

[8]) E. Hecke „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik“ [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199—224]. Im folgenden kurz mit Hecke zitiert.

nachgewiesen. Aus (10), (11) und (12) folgt sofort (4) für alle Formen (1). Diesen einfachen Beweis teilte mir Herr Kloosterman brieflich mit (am 9. März 1927).

Um nun (5) zu erreichen, ersetze ich (11) und (12) durch

$$\Phi(x) = \lambda x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right), \tag{13}$$

$$C(x) = O(x). \tag{14}$$

Für (13) benutze ich das bei der vierdimensionalen Kugel eingeschlagene Verfahren (diese Abschätzung hatte bereits Herr Kloosterman, wie ich seinem Schreiben entnehme, auf demselben Wege erhalten), für (14) eine wohlbekannte Landausche Methode.[9])

Ich erledige zunächst (10) und (14) [§ 1], sodann (13) [§ 2]. Mit K bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $F(\tau)$ [§ 1] oder N [§ 2] abhängen dürfen; mit B unterschiedslos komplexe Zahlen, für die $|B| \leqq K$ ist. Bei allen x-Abschätzungen wird stillschweigend $x \geqq K$ angenommen.

Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

§ 1.

$$\vartheta_Q(\tau) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 = -\infty}^{\infty} e^{2\pi i \tau Q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}} \tag{15}$$

ist eine ganze Modulform der Dimension -2 und einer gewissen durch Q bestimmten Stufe N (Hecke, S. 215). Also gilt

$$a_n = n \sum_{d \mid n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d} + c_n \qquad (n \geqq 1), \tag{16}$$

wobei die Funktion $f(\alpha, \beta)$ der beiden ganzzahligen Veränderlichen α, β nur von deren Verhalten mod N abhängt, in Zeichen

$$f(\alpha_1, \beta_1) = f(\alpha_2, \beta_2), \text{ wenn } \alpha_1 \equiv \alpha_2,\ \beta_1 \equiv \beta_2 \pmod N, \tag{17}$$

während die mit den c_n aus (16) gebildete Funktion (7) eine ganze Modulform -2-ter Dimension und N-ter Stufe ist, die in allen rationalen Spitzen ihres Fundamentalbereiches verschwindet (Hecke, S. 223).

[9]) Vgl. insbesondere E. Landau „Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen. (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid.)“ [Berliner Akademieberichte 1915, S. 458—476]. Man findet diese Methode, an dem einfachsten Fall des Kreisproblems ($Q = n_1^2 + n_2^2$) dargestellt, in den „Vorlesungen“.

Bildet man jetzt $A(x)$, so kommt

$$A(x) = \sum_{n \leqq Nx} a_n \tag{15}$$

$$= \sum_{n \leqq Nx} n \sum_{d \mid n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d} + C(Nx) \tag{16, 8}$$

$$= \sum_{mn \leqq Nx} f(m, n)\, n + C(Nx)$$

(ich habe d durch m, n durch mn ersetzt)

$$= \sum_{\alpha, \beta = 1}^{N} \sum_{\substack{mn \leqq Nx \\ m \equiv \alpha,\ n \equiv \beta \pmod N}} f(m, n)\, n + C(Nx)$$

$$= \sum_{\alpha, \beta = 1}^{N} f(\alpha, \beta)\, S(Nx; \alpha, \beta, N) + C(Nx) \tag{17, 6}$$

(10) $$= \Phi(Nx) + C(Nx) \tag{9}$$

Da $F(\tau)$ Modulform -2-ter Dimension und N-ter Stufe ist, die in allen rationalen Spitzen verschwindet, so läßt sich $\tau^2 F(\tau)$ in eine Potenzreihe nach $e^{-\frac{2\pi i}{N\tau}}$ ohne konstantes Glied entwickeln:

(18) $$\tau^2 F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{2\pi i n}{N\tau}}.$$

Ferner gilt (Hecke, S. 221)

(19) $$F(\tau) = \frac{B}{v} \qquad (\tau = u + vi).$$

Ich verstehe von jetzt ab unter $F(\tau)$ irgend eine Funktion mit (7), (18) und (19), also nicht unbedingt eine Modulform.

Wegen

(19) $$\tau^2 F(\tau) = B \frac{u^2 + v^2}{v} = \frac{B}{v'} \qquad \left(-\frac{1}{\tau} = u' + v' i\right)$$

und (18) ist (Hecke, S. 220 und S. 223)

(20) $$b_n = Bn,$$

(21) $$\sum_{n \leqq x} |b_n| = Bn^{\frac{3}{2}}.$$

Hilfssatz 1: *Es gilt die absolut konvergente Reihendarstellung*

(22) $$\sum_{n \leqq x} c_n (x - n)^3 = -\frac{3N^3}{4\pi^3} x^{\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{5}{2}}} J_5\left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{nx}\right),$$

in der J_5 die Besselsche Funktion erster Art bedeutet.[10])

[10]) Eine ähnliche Reihenentwicklung, aber von viel feinerer Struktur, hat J. R. Wilton für die Modulform -12-ter Dimension

$$e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24}$$

nachgewiesen („A note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$" [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 25 (1929), S. 121—129], S. 122 (3. 1)). Durch die Wiltonsche Arbeit bin ich zu meiner Untersuchung angeregt worden.

Beweis: Die Reihe (22) konvergiert wegen (20) absolut. Ich führe die neue Veränderliche $s = \sigma + ti$ durch

$$\frac{2\pi i \tau}{N} = -s \tag{23}$$

ein, so daß also s ein beliebiger Punkt der Halbebene $\sigma > 0$ sein darf, und setze

$$F(\tau) = H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ns} \tag{24}$$ (7, 23).

Nach einem klassischen Satze aus der Theorie Dirichletscher Reihen[11]) gilt dann

$$\frac{1}{6} \sum_{n \leqq x} c_n (x-n)^3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{H(s)}{s^4} e^{xs}\, ds. \tag{25}$$

Setzt man in (25) für $H(s)$

$$-\frac{4\pi^2}{N^2 s^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{4\pi^2 n}{N^2 s}} \tag{18, 23, 24}$$

ein und integriert sodann gliedweise, so folgt

$$\frac{1}{6} \sum_{n \leqq x} c_n (x-n)^3 = -\frac{4\pi^2}{N^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{4\pi^2 n}{N^2 s}} \frac{e^{xs}}{s^6}\, ds \tag{26}$$

$$= -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{xs - \frac{4\pi^2 n}{N^2 s}} \frac{ds}{s^6}. \tag{27}$$

Um den Übergang von (26) zu (27) zu rechtfertigen, beachte man, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{xs}}{s^6} b_n e^{-\frac{4\pi^2 n}{N^2 s}} \right| = \frac{e^x}{(1+t^2)^3} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\frac{4\pi^2 n}{N^2(1+t^2)}}$$

$$= B \frac{e^x}{(1+t^2)^3} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{4\pi^2 n}{N^2(1+t^2)}} \tag{20}$$

$$= B \frac{e^x}{(1+t^2)^3} \left(1 - e^{-\frac{4\pi^2}{N^2(1+t^2)}}\right)^{-2} = B \frac{e^x}{1+t^2}.$$

Nach N. Sonine[12]) gilt für positive y, m, a

$$J_m(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{\frac{a}{2}s - \frac{y^2}{2as}} \frac{ds}{s^{m+1}}.$$

[11]) G. H. Hardy und Marcel Riesz „The general theory of Dirichlet's series" (Cambridge 1915), Theorem 39.

[12]) N. Sonine „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries" [Mathematische Annalen **16** (1880), S. 1–80], S. 25 (69). Vgl. auch N. Nielsen „Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen" (Leipzig 1904) S. 126 (7).

Mit

$$y = \frac{4\pi}{N}\sqrt{nx}, \qquad m = 5, \qquad a = 2x$$

ergibt dies

$$J_5\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{nx}\right) = \left(\frac{2\pi}{N}\sqrt{\frac{n}{x}}\right)^5 \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{xs-\frac{4\pi^2 n}{N^2 s}}\frac{ds}{s^6}. \tag{28}$$

(22) folgt jetzt aus (27) und (28).

Ist $f(x)$ für $x > 0$ definiert, so setze ich zur Abkürzung

$$\Delta f(x) = f\left(x+\frac{3}{4}\right) - 3f\left(x+\frac{1}{2}\right) + 3f\left(x+\frac{1}{4}\right) - f(x) \tag{29}$$

(es ist $\Delta f(x)$ die dritte Differenz von $f(x)$ beim Fortschreiten um $\frac{1}{4}$).

Hilfssatz 2:

$$\Delta \sum_{n\leqq x} c_n (x-n)^3 = Bx. \tag{30}$$

Beweis: Für $y > 0$ ist nach E. Landau [13])

$$\left|\Delta\left(x^{\frac{5}{2}} J_5(2\pi\sqrt{yx})\right)\right| \leqq K x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{4}} \operatorname{Min}\left(x^{\frac{3}{2}}, y^{\frac{3}{2}}\right)$$

(sogar mit absolut konstantem K). Wendet man dies mit $y = \frac{4n}{N^2}$ an, so folgt, da in (22) die Differenzenbildung gliedweise vorgenommen werden darf,

$$\begin{aligned}
\Delta \sum_{n\leqq x} c_n (x-n)^3 &= -\frac{3N^3}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{5}{2}}}\Delta\left(x^{\frac{5}{2}} J_5\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{nx}\right)\right) \\
&= B\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{|b_n|}{n^{\frac{5}{2}}} x^{\frac{3}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \operatorname{Min}\left(x^{\frac{3}{2}}, n^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= Bx^{\frac{3}{4}}\left(\sum_{n\leqq x}{}' \frac{b_n}{n^{\frac{5}{4}}} + x^{\frac{3}{2}}\sum_{n>x}{}' \frac{b_n}{n^{\frac{11}{4}}}\right) \\
&= Bx^{\frac{3}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}\right) = Bx \qquad (21).
\end{aligned}$$

Beweis von (14): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x eine natürliche Zahl. Wegen (29) ist dann

$$\Delta \sum_{n\leqq x} c_n (x-n)^3 = \sum_{n\leqq x} c_n \Delta(x-n)^3 = \frac{3}{32} C(x) \qquad (8),$$

und (30) liefert die Behauptung.

[13]) Vgl. die in Fußnote [9]) genannte Abhandlung, Formel (37) (in der $k = 4$, $\varrho = 3$, $z = \frac{1}{4}$ gesetzt worden ist).

§ 2.

Für reelle u setze ich

$$R(u) = u - [u], \qquad \psi(u) = R(u) - \frac{1}{2}. \tag{31}$$

α und β sind stets natürliche Zahlen $\leqq N$. In Summen, die nach m oder nach n laufen, soll $\sum'$ andeuten, daß m neben anderen Bedingungen die Kongruenz $m \equiv \alpha \pmod N$ oder, daß n neben anderen Bedingungen die Kongruenz $n \equiv \beta \pmod N$ zu erfüllen hat.

Es sei

$$\varrho(x; \alpha, \beta, N) = \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right). \tag{32}$$

Hilfssatz 3:

$$S(Nx; \alpha, \beta, N) = \frac{N}{2} x^2 \sum_{m=1}^{\infty}' \frac{1}{m^2} - Nx\,\varrho(x; \alpha, \beta, N) + Bx. \tag{33}$$

Beweis:

$$S(Nx; \alpha, \beta, N) = \sum_{m \leqq N x}' \sum_{n \leqq \frac{Nx}{m}}' n \tag{6}$$

$$= \sum_{m \leqq N x}' \sum_{0 \leqq q \leqq \frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}} (\beta + Nq)$$

$$= \beta \sum_{m \leqq N x}' \left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N} + 1\right] + \frac{N}{2} \sum_{m \leqq N x}' \left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right]\left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N} + 1\right]$$

$$= \beta x \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} + Bx + \frac{N}{2} \sum_{m \leqq N x}' \left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right]^2 + \frac{Nx}{2} \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} + Bx$$

$$= \left(\beta + \frac{N}{2}\right) x \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} + \frac{N}{2} \sum_{m \leqq N x}' \left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right]^2 + Bx. \tag{34}$$

$$[u]^2 = u^2 - 2u\,R(u) + R^2(u) \tag{35}$$ (31).

$$\frac{N}{2} \sum_{m \leqq N x}' \left[\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right]^2 = \frac{N}{2} \sum_{m \leqq N x}' \left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right)^2 - N \sum_{m \leqq N x}' \left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right) R\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right) + Bx \tag{35}$$

$$= \frac{N}{2} x^2 \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m^2} - \beta x \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} - Nx \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} R\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right) + Bx. \tag{36}$$

$$S(Nx; \alpha, \beta, N) = \frac{N}{2} x^2 \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m^2} + \frac{N}{2} x \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} - Nx \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m} R\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right) + Bx \tag{34, 36}$$

$$= \frac{N}{2} x^2 \sum_{m \leqq N x}' \frac{1}{m^2} - Nx\,\varrho(x; \alpha, \beta, N) + Bx \tag{31, 32}$$

$$= \frac{N}{2} x^2 \sum_{m=1}^{\infty}' \frac{1}{m^2} - Nx\,\varrho(x; \alpha, \beta, N) + Bx. \tag{33}$$

Hilfssatz 4:

$$\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right)=B. \quad (37)$$ [14]

Beweis:

$$\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right)=\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+1\right) \quad (31)$$

$$=x\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{N}\right)\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}-\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\left[\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+1\right] \quad (38)\ (31).$$

$$x\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m^2}=x\sum_{m>N\sqrt{x}}{}' \frac{1}{m^2}+B=x\sum_{m>N\sqrt{x}}{}' \frac{1}{(m-\alpha)^2}+Bx\sum_{m>N\sqrt{x}} \frac{1}{m^3}+B$$

$$=x\sum_{m>\sqrt{x}} \frac{1}{N^2m^2}+B=\frac{x}{N^2}\sum_{m>\sqrt{x}} \frac{1}{m(m+1)}+B$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{N^2}+B. \quad (39)$$

$$\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}=\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m-\alpha}+B=\frac{1}{N}\sum_{\sqrt{x}<m\leqq x} \frac{1}{m}+B$$

$$=\frac{1}{2N}\log x+B. \quad (40)$$

$$\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\left[\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+1\right]=\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\sum_{0\leqq q\leqq \frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}} 1$$

$$=\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\sum_{n\leqq\frac{Nx}{m}}{}' 1=\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' \sum_{N\sqrt{x}<m\leqq\frac{Nx}{n}}{}' \frac{1}{m}. \quad (41)$$

$$\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq\frac{Nx}{n}}{}' \frac{1}{m}=\sum_{N\sqrt{x}<m\leqq\frac{Nx}{n}}{}' \frac{1}{m-\alpha}+B\sum_{m>\sqrt{x}} \frac{1}{m^2}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\sqrt{x}<m\leqq\frac{x}{n}} \frac{1}{m}+\frac{B}{\sqrt{x}}=\frac{1}{N}\log\frac{\sqrt{x}}{n}+\frac{B}{\sqrt{x}}+B\frac{n}{x}. \quad (42)$$

$$\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' \sum_{N\sqrt{x}<m\leqq\frac{Nx}{n}}{}' \frac{1}{m}=\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' \left(\frac{1}{N}\log\frac{\sqrt{x}}{n}+\frac{B}{\sqrt{x}}+B\frac{n}{x}\right) \quad (42)$$

$$=\frac{1}{2N}\log x\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' 1-\frac{1}{N}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' \log n+B. \quad (43)$$

[14]) Für $N=1$ findet man diese Abschätzung bei S. Wigert „Sur quelques fonctions arithmétiques“ [Acta Mathematica **37** (1914), S. 113–140], S. 117–119.

$$(44)\qquad \sum_{n\leqq \sqrt{x}}{}' 1 = \sum_{0\leqq q\leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{N}} 1 = \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]+1.$$

$$\sum_{n\leqq \sqrt{x}}{}' \log n = \sum_{0\leqq q\leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{N}} \log(\beta+Nq)$$

$$= \sum_{q\leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{N}} \log Nq + \frac{\beta}{N}\sum_{q\leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{N}} \frac{1}{q} + B$$

$$(45)\qquad = \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]\log N + \left(\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]+\frac{1}{2}+\frac{\beta}{N}\right)\log\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right] + B.$$

$$(46)\qquad \log\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right] = \frac{1}{2}\log x - \log N + \frac{B}{\sqrt{x}}.$$

$$(47)\qquad \sum_{n\leqq \sqrt{x}}{}' \log n = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]+\frac{1}{2}+\frac{\beta}{N}\right)\log x - \frac{\sqrt{x}}{N} + B \qquad (45, 46).$$

$$\sum_{n\leqq \sqrt{x}}{}' \sum_{Nx<m\leqq \frac{Nx}{n}}{}' \frac{1}{m} = \frac{1}{2N}\log x\left(\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]+1\right)$$

$$- \frac{1}{2N}\left(\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]+\frac{1}{2}+\frac{\beta}{N}\right)\log x + \frac{\sqrt{x}}{N^2} + B \quad (43,44,47)$$

$$(48)\qquad = \frac{\sqrt{x}}{N^2} + \frac{1}{2N}\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{N}\right)\log x + B.$$

(37) folgt jetzt aus (38)—(41) und (48).

Hilfssatz 5: *Es seien* $r\geqq 1$, $\nu\geqq 1$, $h\geqq 0$ *ganz*; $R = 2^{r-1}$; σ *reell*;

$$P(y) = \gamma_0 y^r + \ldots + \gamma_r$$

habe reelle Koeffizienten. Dann ist

$$(49)\qquad \sum_{m=0}^{\nu-1} e^{i\sigma P(m)} m^h < 4\nu^h\left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}}\left\{\sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \mathrm{Min}\left(\nu, \left|\sin\tfrac{1}{2}\sigma\gamma_0 r!\, H\right|^{-1}\right)\right\}^{\frac{1}{R}}\right).$$

Hierin bedeutet $\mathrm{Min}(\nu, \frac{1}{0})$ *die Zahl* ν; *das Summationszeichen rechts bleibt im Falle* $r=1$ *weg*; H *ist* $= h_1 \ldots h_{r-1}$ *für* $r\geqq 2$ *und* $=1$ *für* $r=1$; $(h)_{r-1}$ *steht zur Abkürzung für* $h_1, \ldots, h_{r-1}$.

Dies ist Hilfssatz 3 der in Fußnote [7]) genannten Landauschen Abhandlung. In wenig abweichender Form folgt (49) auch aus Satz 265 der „Vorlesungen“ [15]).

[15]) Bd. I, S. 253—255, S. 88—89; Bd. II, S. 32.

Hilfssatz 6: *Es seien* $r \geqq 1$ *ganz;* $R = 2^{r-1}$; $R_1 = R(r+1)$; M, M' *ganz;* $0 < w \leqq 1$;

$$z \geqq (2N)^{r+3}; \tag{50}$$

$$z^{\frac{1}{r+2}} \leqq M \leqq M' \leqq 2M \leqq 2Nz^{\frac{2}{r+3}}. \tag{51}$$

Dann ist

$$\sum_{m=M}^{M'} e^{\frac{iz}{m+w}} = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z. \tag{52}$$

Beweis: Ich setze

$$\nu = \left[M^{\frac{r+2}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}}\right], \qquad \mu = \left[\frac{M'-M}{\nu}\right]. \tag{53}$$

Wegen

$$M^{\frac{r+2}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}} \geqq z^{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+1}} = 1 \qquad (51)$$

ist $\nu \geqq 1$. Aus der Definition von R und R_1 ergibt sich

$$\frac{2}{r+3}\left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\left(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{1}{r+3}\left(1-\frac{1}{R}\right) \leqq 0. \tag{54}$$

Somit ist

$$M^{\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}} z^{-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{R_1}} = B \qquad (51, 54), \tag{55}$$

$$\nu = B M^{\frac{r+2}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}} = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} M^{\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}} z^{-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{R_1}} \qquad (53)$$

$$= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \qquad (55). \tag{56}$$

Für $\mu \leqq 1$ ist (52) erfüllt, denn alsdann gilt nach (53) und (56)

$$\sum_{m=M}^{M'} e^{\frac{iz}{m+w}} = B(M'-M+1) = B\left(\nu\frac{M'-M}{\nu}+1\right) = B\nu - B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}}.$$

Fortan sei also $\mu \geqq 2$. Es ist

$$M'-(M+\mu\nu-1) < M'-M-\nu\left(\frac{M'-M}{\nu}-1\right)+1 = \nu+1 = B\nu \quad (53), \tag{57}$$

$$M+\mu\nu \leqq M+\frac{M'-M}{\nu}\nu = M' \qquad (53), \tag{58}$$

$$\sum_{m=M}^{M'} e^{\frac{iz}{m+w}} - \sum_{m=M}^{M+\mu\nu-1} e^{\frac{iz}{m+w}} = B\nu = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \qquad (58, 57, 56). \tag{59}$$

k bedeute, falls es nicht eingeschränkt wird, eine beliebige Zahl aus der Reihe $0 \leqq k \leqq \mu - 1$. Ich setze

$$v_k = M + w + k\nu. \tag{60}$$

Dann ist

$$\sum_{m=M}^{M+\mu\nu-1} e^{\frac{iz}{m+w}} = \sum_{k=0}^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_k+m}}. \tag{61}$$

Nunmehr sei für $|y| < v_k$

$$\frac{1}{v_k+y} = \frac{1}{v_k}(P(y) + y^{r+1}T(y)), \tag{62}$$

$$P(y) = P_{r,k}(y) = \sum_{p=0}^{r}(-1)^p\left(\frac{y}{v_k}\right)^p, \tag{63}$$

$$T(y) = T_{r,k}(y) = (-1)^{r+1}\frac{1}{v_k^{r+1}}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{y}{v_k}\right)^p, \tag{64}$$

$$G(y) = G_{r,k}(y) = \exp\left\{\frac{iz}{v_k}y^{r+1}T(y)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty} g_{r,k,h}\,y^h = \sum_{h=0}^{\infty} g_h y^h. \tag{65}$$

Es wird dann

$$\sum_{h=0}^{\infty} g_h y^h = \exp\left\{(-1)^{r+1} iz\frac{y^{r+1}}{v_k^{r+2}}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{y}{v_k}\right)^p\right\} \quad (65, 64); \tag{66}$$

$$\frac{\nu}{v_k} \leqq \frac{\nu}{M} \leqq \left(\frac{M}{z}\right)^{\frac{1}{r+1}} \leqq \left(Nz^{\frac{2}{r+3}-1}\right)^{\frac{1}{r+1}} = N^{\frac{1}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+3}} \leqq Nz^{-\frac{1}{r+3}}$$

$$\leqq \frac{1}{2} \quad (60, 53, 51, 50); \tag{67}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} g_h |\nu^h \leqq \exp\left\{2z\frac{\nu^{r+1}}{v_k^{r+2}}\right\} \leqq \exp\left\{2z\frac{1}{M^{r+2}}\frac{M^{r+2}}{z}\right\}$$

$$= e^2 \quad (66, 67, 60, 53); \tag{68}$$

$$\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_k+m}} = \sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_k}P(m)} \sum_{h=0}^{\infty} g_h m^h \quad (62, 65)$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} g_h \sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_k}P(m)} m^h. \tag{69}$$

Auf die innere Summe in (69) wende ich Hilfssatz 5 mit

$$\sigma = \frac{z}{v_k}$$

und mit dem P aus (63) an. Es ist dann

$$\gamma_0 = \left(-\frac{1}{v_k}\right)^r.$$

Setze ich daher zur Abkürzung

$$t_{r,k} = t_k = \frac{z}{2v_k^{r+1}} r!\,H, \tag{70}$$

so ergibt sich aus (49), (69) und (68)

$$\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_k+m}} = B \sum_{h=0}^{\infty}{}' g_h \nu^h \left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_k|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}} \right)$$

$$= B \left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_k|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}} \right). \tag{71}$$

Aus (61) und (71) folgt

$$\sum_{m=M}^{M+\mu\nu-1} e^{\frac{iz}{m+w}} = B \left(\mu\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \sum_{k=0}^{\mu-1} \left\{ \sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_k|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}} \right)$$

$$= B \left(\mu\nu^{1-\frac{1}{R}} + \mu^{1-\frac{1}{R}} \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\mu-1} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_k|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}} \right), \tag{72}$$

letzteres nach der verallgemeinerten Schwarzschen Ungleichung[16]). Hierin ist nach (53) und (51)

$$\mu\nu^{1-\frac{1}{R}} = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}}, \tag{73}$$

$$\mu^{1-\frac{1}{R}} \nu^{1-\frac{r}{R}} = B M^{1-\frac{r}{R}-\frac{r-1}{R_1}} z^{\frac{r-1}{R_1}}. \tag{74}$$

Nunmehr soll die geschweifte Klammer in (72) abgeschätzt werden. Für $0 \leqq k \leqq \mu - 2$ ist

$$t_k - t_{k+1} = \frac{z r! H}{2} \left(\frac{1}{v_k^{r+1}} - \frac{1}{v_{k+1}^{r+1}} \right) = \frac{z r! H}{2} \frac{(v_k+\nu)^{r+1} - v_k^{r+1}}{v_k^{r+1} v_{k+1}^{r+1}} \qquad (70, 60)$$

$$\geqq \frac{z r! H}{2} \frac{(r+1)\nu}{v_{k+1}^{r+2}} \geqq \frac{z(r+1)! H\nu}{2^{r+3} M^{r+2}} \qquad (60, 58, 51)$$

$$\geqq \frac{z H \nu}{8 M^{r+2}}. \tag{75}$$

Es sei ξ_g ein Intervall von der Form

$$\frac{\pi}{2} g < y \leqq \frac{\pi}{2} (g+1) \qquad (g \text{ ganz}),$$

so betrachte ich die Teilsumme

$$\eta_g = \sum_{\substack{k=0 \\ t_k \text{ in } \xi_g}}^{\mu-1} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_k|^{-1}), \tag{76}$$

welche als nicht leer vorausgesetzt wird. Ist g^* die ganze unter den Zahlen $\frac{g}{2}, \frac{g+1}{2}$ und $\varkappa$ dasjenige k in η_g, wofür $|t_\varkappa - \pi g^*|$ ein Minimum wird, so ersetze ich bei der Abschätzung von η_g nach oben dieses Glied durch ν; auf die übrigen (falls solche vorkommen) wende ich aber (75) an.

[16]) Vgl. z. B. „Vorlesungen", Satz 259.

So kommt

$$\eta_g \leqq \nu + \sum_l \left(\sin \frac{z H \nu l}{8 M^{r+2}}\right)^{-1}, \tag{77}$$

wo nur über diejenigen l zu summieren ist, die

$$1 \leqq l \leqq \mu, \qquad \frac{z H \nu l}{8 M^{r+2}} \leqq \frac{\pi}{2} \tag{78}$$

erfüllen. Aus (77) und (78) folgt

$$\eta_g \leqq \nu + \sum_{l=1}^{\mu} \frac{4\pi M^{r+2}}{z H \nu l} \leqq K\left(\nu + \frac{M^{r+2}}{z H \nu} \log \mu\right)$$

$$\leqq K\left(\nu + \frac{M^{r+2}}{z H \nu} \log z\right) \tag{79}$$ (53, 51).

Ferner ist

$$t_k \leqq \frac{z r! H}{2 M^{r+1}} \tag{70, 60}.$$

Die Anzahl der von t_k betroffenen ξ_g-Intervalle ist also

$$\leqq K\left(\frac{z r! H}{2 M^{r+1}} + 1\right).$$

(76) und (79) ergeben daher

$$\sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\mu-1} \operatorname{Min}(\nu, |\sin t_k|^{-1})$$

$$= B \sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \left(\frac{z r! H}{M^{r+1}} + 1\right)\left(\nu + \frac{M^{r+2}}{z H \nu} \log z\right)$$

$$= B\left(\frac{z r!\, \nu^{2r-1}}{M^{r+1}} + \nu^r + r!\, \nu^{r-2} M \log z + \frac{M^{r+2}}{z \nu} \log z \log^{r-1} \nu\right)$$

$$= B r! \log^r z \left(\frac{z \nu^{2r-1}}{M^{r+1}} + \nu^r + \nu^{r-2} M + \frac{M^{r+2}}{z \nu}\right) \tag{80}$$ (53, 51).

Hierin ist nach (53) und (51)

$$\frac{z \nu^{2r-1}}{M^{r+1}} = B M^{\frac{r+2}{r+1}(2r-1)-(r+1)} z^{1-\frac{2r-1}{r+1}} = B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\nu^r = B M^{\frac{r(r+2)}{r+1}} z^{-\frac{r}{r+1}} = B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}} \left(M z^{-\frac{2}{r+3}}\right)^{\frac{r+3}{r+1}}$$

$$= B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\nu^{r-2} M = B M^{\frac{r+2}{r+1}(r-2)+1} z^{-\frac{r-2}{r+1}} = B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\frac{M^{r+2}}{z \nu} = B M^{r+2-\frac{r+2}{r+1}} z^{-1+\frac{1}{r+1}} = B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}} \left(M z^{-\frac{2}{r+3}}\right)^{\frac{r+3}{r+1}}$$

$$= B M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}}.$$

Es ist somit nach (80)

$$\sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\mu-1} \mathrm{Min}\,(r, |\sin t_k|^{-1}) = B\,r!\,M^{r-\frac{3}{r+1}} z^{-1+\frac{3}{r+1}} \log^r z\,.$$

Wegen $r \leqq R$ und $\sqrt[R]{r!} = B$ folgt hieraus

$$\left\{\sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\mu-1}\right\}^{\frac{1}{R}} = B\,M^{\frac{r}{R}-\frac{3}{R_1}} z^{-\frac{1}{R}+\frac{3}{R_1}} \log z, \tag{81}$$

$$\mu^{1-\frac{1}{R}}\,\nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{\sum_{(h)_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\mu-1}\right\}^{\frac{1}{R}} = B\,M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z \qquad (74, 81). \tag{82}$$

Die Behauptung (52) folgt nunmehr aus (59), (72), (73) und (82).

Hilfssatz 7: *Für ganzes* $r \geqq 1$, $R = 2^{r-1}$ *ist*

$$L_r = \sum_{N x^{\frac{2}{r+4}} < m \leqq N x^{\frac{2}{r+3}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N}\right) = B\,x^{-\frac{1}{20\,R\,r}} \log^3 x. \tag{83}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$x \geqq 2^{r+3} N^{r+4}, \tag{84}$$

da sonst die Behauptung klar ist. Für $s \geqq 3$ liefert eine Fourierentwicklung

$$s \int_0^{\pm\frac{1}{s}} \psi(u+v)\,dv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} d_q\, e^{2q\pi u i} \tag{85}$$

mit

$$d_0 = 0; \qquad |d_q| \leqq \frac{1}{|q|}, \qquad |d_q| \leqq \frac{s}{q^2} \qquad (q \neq 0). \tag{86}$$

Nunmehr mögen die ganzen Zahlen M und M' den Ungleichungen

$$x^{\frac{2}{r+4}} < M \leqq M' \leqq 2M \leqq 2\,x^{\frac{2}{r+3}} \tag{87}$$

genügen. Ferner sei

$$q_0 = \frac{N}{2\pi} \frac{M^{r+2}}{x}. \tag{88}$$

Aus (85) und (86) folgt

$$s \Bigg| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm\frac{1}{s}} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{\beta}{N} + v\right) dv \Bigg| \leqq 2 \sum_{q=1}^{\infty} \left| \sum_{m=NM}^{NM'} e^{\frac{2q\pi x i}{m}} \right| \mathrm{Min}\left(\frac{1}{q}, \frac{s}{q^2}\right) \tag{89}$$

$$= 2 \sum_{q \leqq q_0} + 2 \sum_{q > q_0} = 2\,S_1 + 2\,S_2. \tag{90}$$

In S_1 nehme ich

$$\frac{2q\pi x}{N} = z. \tag{91}$$

Nach (91) und (84) ist (50) erfüllt. Nach (91) und (88) besagt $q \leqq q_0$, daß $z^{\frac{1}{r+2}} \leqq M$ ist. Aus (87) und (91) folgt ferner

$$M \leqq x^{\frac{2}{r+3}} \leqq N z^{\frac{2}{r+3}}.$$

Es ist also auch (51) erfüllt. Ich kann daher (52) mit dem z aus (91), $w = \frac{\alpha}{N}$, $R_1 = R(r+1)$ anwenden und erhalte

$$\sum_{m=M}^{M'} e^{\frac{2q\pi x i}{N m+\alpha}} = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z. \tag{92}$$

Wegen

$$\left| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' e^{\frac{2q\pi x i}{m}} \right| \leqq \left| \sum_{m=M}^{M'}{}' e^{\frac{2q\pi x i}{N m+\alpha}} \right| + 2$$

ergibt (92)

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e^{\frac{2q\pi x i}{m}} = B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z. \tag{93}$$

Aus (89), (90), (91), (93), (88) und (87) folgt

$$\begin{aligned} S_1 &= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} \left(\frac{2\pi x}{N}\right)^{\frac{1}{R_1}} \sum_{q \leqq q_0} q^{\frac{1}{R_1}} \log \frac{2q\pi x}{N} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{q}, \frac{s}{q^2}\right) \\ &= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} \log x \sum_{q \leqq q_0} q^{\frac{1}{R_1}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{q}, \frac{s}{q^2}\right) \\ &= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} \log x \left(\sum_{q \leqq s} q^{\frac{1}{R_1}-1} + s \sum_{q > s} q^{\frac{1}{R_1}-2} \right) \\ &= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} \log x \left(s^{\frac{1}{R_1}} \sum_{q \leqq s} \frac{1}{q} + s \sum_{q > s} q^{\frac{1}{R_1}-2} \right)^{17)} \\ &= B M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} (sx)^{\frac{1}{R_1}} \log x \log s. \end{aligned} \tag{94}$$

In S_2 ist wegen (89), (90) und (87) die innere Summe

$$= B(M' - M + 1) = BM.$$

[17]) Man darf hier nicht

$$\sum_{q \leqq s} q^{\frac{1}{R_1}-1} = B s^{\frac{1}{R_1}}$$

abschätzen, wie ich es an der entsprechenden Stelle der „Teilerprobleme" (Formel (5.32)) getan habe. Es muß also dort in (5.1) und S. 78, Zeile 3 von unten $\log^2 x$ durch $\log^3 x$ ersetzt werden.

Es ist somit

$$S_2 = BMs\sum_{q>q_0}\frac{1}{q^2} = B\frac{Ms}{q_0} = BM^{-r-1}sx \tag{95}$$

(88),

$$s\sum_{m=NM}^{NM'}{}'\int_0^{\frac{1}{s}}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+v\right)dv = B\left(M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}}s^{\frac{1}{R_1}}x^{\frac{1}{R_1}}+M^{-r-1}sx\right)\log x\log s \tag{96}$$

(89, 90, 94, 95).

Da für jedes Zahlenpaar u_1 und $u_2 > u_1$ die Ungleichung

$$\psi(u_2)-\psi(u_1)\leqq u_2-u_1$$

besteht, ist

$$-\frac{M'-M+1}{2s}+s\sum_{m=NM}^{NM'}{}'\int_0^{\frac{1}{s}}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+v\right)dv \leqq \sum_{m=NM}^{NM'}{}'\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right)$$

$$\leqq \frac{M'-M+1}{2s}+s\sum_{m=NM}^{NM'}{}'\int_{-\frac{1}{s}}^{0}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}+v\right)dv,$$

also, wegen $M'-M+1\leqq 2M$, nach (96)

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}'\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right) = B\left(M^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}}s^{\frac{1}{R_1}}x^{\frac{1}{R_1}}+M^{-r-1}sx+Ms^{-1}\right)\log x\log s.$$

Durch partielle Summation folgt hieraus

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}'\frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right) = B\left(M^{-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}}s^{\frac{1}{R_1}}x^{\frac{1}{R_1}}+M^{-r-2}sx+s^{-1}\right)\log x\log s. \tag{97}$$

Das Summationsintervall von (83) zerfällt in $B\log x$ Teilintervalle $NM\leqq m\leqq NM'$, $m\equiv\alpha\pmod N$ und B lose Glieder. Aus (97) folgt daher mit $s=x^{\frac{1}{10}}$

$$\sum_{Nx^{\frac{2}{r+4}}<m\leqq Nx^{\frac{2}{r+3}}}{}'\frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right)$$

$$= B\left(x^{-\frac{2}{r+4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{11}{10R_1}}+x^{-\frac{2(r+2)}{r+4}+\frac{11}{10}}+x^{-\frac{1}{10}}\right)\log^3 x+Bx^{-\frac{2}{r+4}}. \tag{98}$$

Hierin ist

$$-\frac{2}{r+4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{11}{10R_1} = \frac{1}{R_1}\left(-\frac{r}{r+4}+\frac{1}{10}\right)\leqq\frac{1}{2Rr}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{20Rr}, \tag{99}$$

$$-\frac{2(r+2)}{r+4}+\frac{11}{10} = -\frac{r}{r+4}+\frac{1}{10}\leqq-\frac{1}{5}+\frac{1}{10} = -\frac{1}{10}\leqq-\frac{1}{20Rr} \tag{100}$$

$$-\frac{2}{r+4}\leqq-\frac{1}{5r}\leqq-\frac{1}{20Rr}. \tag{101}$$

Aus (98) bis (101) folgt die Behauptung (83).

Hilfssatz 8:

$$\varrho(x;\alpha,\beta,N) = B\frac{\log x}{\log\log x}. \tag{102}$$

Beweis: Ich setze

$$r_0 = [\log\log x] \tag{103}$$

und teile

$$\varrho(x;\alpha,\beta,N) = \sum_{m\leqq Nx}{}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m}-\frac{\beta}{N}\right) \tag{32}$$

$$= \sum_{m\leqq Nx^{\frac{2}{r_0+4}}}{}' + \sum_{Nx^{\frac{2}{r_0+4}}<m\leqq N\sqrt{x}}{}' + \sum_{N\sqrt{x}<m\leqq Nx}{}' = \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3. \tag{104}$$

Eine primitive Abschätzung von ϱ_1 ergibt

$$\varrho_1 = B\sum_{m\leqq Nx^{\frac{2}{r_0+4}}}\frac{1}{m} = B + B\frac{\log x}{r_0} = B\frac{\log x}{\log\log x} \qquad (103). \tag{105}$$

Für $1\leqq r\leqq r_0$ hat man ferner nach (103)

$$x^{-\frac{1}{20Rr}} \leqq x^{-\frac{1}{10.2^{\log\log x}\log\log x}} = \exp\left\{-\frac{(\log x)^{1-\log 2}}{10\log\log x}\right\}$$
$$= B\frac{1}{\log^3 x\log\log x}.$$

Wendet man dies auf (83) an, so folgt

$$L_r = \frac{B}{\log\log x} = \frac{B}{r_0} \qquad (103), \tag{106}$$

$$\varrho_2 = \sum_{r=1}^{r_0} L_r = B \qquad (83, 104, 106). \tag{107}$$

Schließlich ist

$$\varrho_3 = B \qquad (104, 37). \tag{108}$$

Aus (104), (105), (107) und (108) folgt die Behauptung (102).

Hilfssatz 9:

$$S(Nx;\alpha,\beta,N) = \frac{N}{2}x^2\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{1}{m^2} + B\frac{x\log x}{\log\log x}. \tag{109}$$

Beweis: (33), (102).

Beweis von (13): (9), (109).

Radość, den 28. Juni 1931.

(Eingegangen am 2. Juli 1931.)

Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems.

(Mitteilung aus dem Reichspostzentralamt.)

Von

Felix Pollaczek in Berlin.

§ 1.

Einleitung.

Im nachstehenden werden, durch Fragestellungen der Fernsprechtechnik veranlaßt, die Vorgänge an einer Schaltergruppe, an der das Warten durch Vorschrift ausgeschlossen wird, wahrscheinlichkeitstheoretisch behandelt. Um diese Vorgänge nachzubilden, gehen wir von einem sehr allgemeinen, von der Schalteranzahl s der Gruppe sowie von einem reellen Parameter η, einem ganzzahligen Parameter n und einer willkürlichen Verteilungsfunktion $f(t)$ abhängigen Schema aus. Alle bezüglich dieses Schemas zu stellenden Wahrscheinlichkeitsfragen können formal unmittelbar beantwortet werden, wobei die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, bzw. Erwartungswerte hierin auftretender Größen, sich als vielfache bestimmte Integrale über gewisse von den Integrationsvariablen in sehr unübersichtlicher Weise abhängige reelle Funktionen ergeben.

Die eigentliche Aufgabe besteht nun darin, derartige Integrale wirklich auszuführen; wir erledigen dies schrittweise mittels verschiedener analytischer Kunstgriffe, vor allem mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors. Ebenso wie dieses Dirichletsche Integral, kurz gesagt, einen analytischen Ausdruck für das Vorzeichen einer reellen Zahl a $(\neq 0)$ liefert, suchen wir allgemein analytische Ausdrücke für das Vorzeichen der größten, zweitgrößten, ..., kleinsten von $m \geqq 1$ reellen von Null verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Diese Aufgabe wird gelöst durch gewisse m-fache komplexe Integrale. Mit Hilfe dieser komplexen Integrale gelingt es dann durch ein verhältnismäßig umständliches Rekursionsverfahren, die vorerwähnten vielfachen Integrationen „auszu-

führen". Man erhält nämlich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten usw. (soweit sie zeitunabhängig sind) in Form komplexer über die Kurven von Fig. 1 zu erstreckender Doppelintegrale

$$(*) \qquad \int_{C_p} \int_{K_y} F(p, y)\, \Phi_0(p, y)\, dp\, dy,$$

worin $F(p, y)$ eine elementare bekannte Funktion der Integrationsvariablen p und y sowie der Parameter η und n ist, während die Berechnung von $\Phi_0(p, y)$ die Lösung eines (noch von der willkürlichen Verteilungsfunktion $f(t)$ abhängigen) Systems von s simultanen linearen Integralgleichungen im Komplexen erfordert.

Es ist daher notwendig, dieses Gleichungssystem zu untersuchen und es zeigt sich, daß über die Existenz, Regularität und Eindeutigkeit der Lösungen in gewissen Bereichen der resp. Variablen allgemein (für beliebiges $f(t)$) gültige Aussagen gemacht werden können, die es für gewisse Klassen von Verteilungsfunktionen $f(t)$ ermöglichen, diese Lösungen in geschlossener Form darzustellen. Z. B. ist $\Phi_0(p, y)$ für alle $f(t)$ gemäß Gleichung (117) (§ 9) rational, und durch ein endliches Verfahren berechenbar. Weiter ist das zur asymptotischen Entwicklung unserer Integrale erforderliche $\Phi_0(y, y)$ für alle $f(t)$ einer und derselben rationalen Funktion gleich.

Für diejenigen Verteilungsfunktionen $f(t)$, deren zugehörige $\Phi_0(p, y)$ berechnet sind, können die Integrale $(*)$ für jedes η und n ausgeführt werden. Weiter lassen sich diese Integrale für $n \to \infty$ asymptotisch entwickeln (wir führen den Beweis nur für Verteilungsfunktionen der Klasse (117)) und für $n = \infty$ werden alle unser Schema betreffenden Wahrscheinlichkeiten zeitunabhängig, d. h. in diesem Falle befinden sich die von uns betrachteten Vorgänge im statistischen Gleichgewicht.

Die im Falle $n = \infty$ für die Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte gültigen, von $f(t)$ nicht mehr abhängigen Formeln sind schon von A. K. Erlang[1]) mittels einfacher Überlegungen, jedoch unter Zugrundelegung der *Hypothese* statistischen Gleichgewichts abgeleitet worden. In unseren, infolge ihrer allgemeineren Voraussetzungen naturgemäß einen größeren analytischen Apparat erfordernden Entwicklungen wird also das Vorhandensein statistischen Gleichgewichts für $n = \infty$ *bewiesen*, während die Anfangsglieder der betreffenden asymptotischen Reihenentwicklungen die Beurteilung der Abweichung der wirklichen Verhältnisse (endliches n) vom Idealfall ($n = \infty$) erlauben.

Unabhängig von unseren Ausgangsproblemen führt die Untersuchung des hier auftretenden Systems von linearen Integralgleichungen zu weiteren

[1]) A. K. Erlang, Solution of some problems in the theory of probabilities, Post Office Electrical Engineers Journal **10** (1918), S. 189–197.

Fragestellungen, z. B. hinsichtlich der Fortsetzbarkeit seiner Lösungen oder der Darstellbarkeit dieser Lösungen in geschlossener Form für gewisse abteilungsweise konstante $f(t)$; als Beitrag hierzu wird im letzten Abschnitt der Fall $s = 2$ des einfachsten derartigen $f(t)$ mittels einfacher funktionentheoretischer Überlegungen erledigt.

§ 2.
Problemstellung.

Das unseren Fragestellungen zugrunde gelegte Schema lautet in seiner einfachsten Fassung folgendermaßen:

Vor einer Gruppe von s ($\geqq 1$) Schaltern treffen „täglich" n Personen innerhalb eines Zeitintervalls von der Länge T regellos ein, wobei (als einfachste mögliche Annahme) vorausgesetzt wird, daß für jede dieser Personen jeder innerhalb des Intervalls T liegende Ankunftszeitpunkt gleichwahrscheinlich sei. Weiter wird zunächst vorausgesetzt, daß für jede dieser n Personen die gleiche virtuelle Abfertigungszeit ($= t_0$) erforderlich sei; jedoch sei vorgeschrieben, daß nur diejenigen Personen, bei deren Ankunft mindestens ein Schalter unbesetzt ist, wirklich abgefertigt werden (und zwar an einem beliebigen der gerade freien Schalter), während alle Übrigen die Schaltergruppe unabgefertigt verlassen mögen.

Die nächstliegende und wichtigste der wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragen, die für dieses Schema gestellt werden können, ist die nach dem „wahrscheinlichsten" oder „zu erwartenden" Werte $\bar{v}$ des *nicht* zur Abfertigung gelangenden Bruchteils v der n eintreffenden Personen. In Anlehnung an den Sprachgebrauch der Fernsprechtechnik soll $\bar{v}$, und ebenso ein später vorkommender allgemeinerer Erwartungswert $\bar{\bar{v}}$, als „Verlust" bezeichnet werden.

Wir beginnen damit, v in Zeichen der Analysis auszudrücken. Die n Personen seien jedesmal in der Reihenfolge ihres Eintreffens vor der Schaltergruppe umnumeriert und der Ankunftszeitpunkt der m-ten Person ($1 \leqq m \leqq n$) sei mit x_m bezeichnet; dann gilt

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq T, \tag{1}$$

und jedem denkbaren Falle des Eintreffens der n so bezifferten Personen hintereinander ist ein Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ des n-dimensionalen Simplex (1) eineindeutig zugeordnet. Da die Vorgänge vor der Schaltergruppe durch die Angabe der Ankunftszeiten (1) und der Abfertigungszeit t_0 und durch die oben erwähnte Abfertigungsvorschrift eindeutig bestimmt sind, ist auch der Bruchteil v der nicht zur Abfertigung gelangenden Personen als Funktion der x_ν ausdrückbar:

$$v = v(x_1, \ldots, x_n).$$

Aus der obigen Voraussetzung, daß für jede Person eine jede Ankunftszeit $0 \leqq x \leqq T$ gleichwahrscheinlich sei, folgt gemäß der Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung unmittelbar, daß der „zu erwartende Wert" von v, also der Gesprächsverlust $\bar{v}$, gleich dem über den Simplex (1) genommenen Mittelwert von v ist, also

$$\bar{v} = \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^T v(x_1, \dots, x_n)\, dx_n : \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^T dx_n$$

oder

$$\bar{v} = \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^T v(x_1, \dots, x_n)\, dx_n. \tag{2}$$

Um zunächst v zu berechnen, führen wir eine Funktion

$$\mathfrak{s}_m(x_1, \dots, x_m) \qquad (m = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

ein, die $= 1$ oder $= 0$ sein soll, je nachdem die m-te Person zur Abfertigung gelangt oder nicht; mittels $\mathfrak{s}_m$ folgt für die relative Anzahl der nicht zur Abfertigung gelangenden Personen, d. i. für den Verlust

$$v = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} (1 - \mathfrak{s}_m) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \mathfrak{s}_m. \tag{4}$$

Führt man weiter den zu (2) analogen Mittelwert

$$\bar{\mathfrak{s}}_m = \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{n-1}}^T \mathfrak{s}_m(x_1, \dots, x_m)\, dx_n \qquad (m = 1, 2, \dots, n) \tag{4a}$$

ein, so folgt aus (2), (4)

$$\bar{v} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \bar{\mathfrak{s}}_m. \tag{5}$$

Unsere Aufgabe kommt also hinaus auf die Bestimmung der Funktion (3) und ihres Mittelwertes (4a), für welchen durch Ausführung der $n - m$ inneren Integrationen folgt

$$\bar{\mathfrak{s}}_m = \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-1}}^T \mathfrak{s}_m(x_1, \dots, x_m) \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m. \tag{6}$$

Da die Schaltergruppe zur Zeit $t = 0$ voraussetzungsgemäß noch unbesetzt ist, gelangen die ersten s Personen sicher zur Abfertigung, also

$$\mathfrak{s}_m = 1 \qquad (1 \leqq m \leqq s). \tag{7}$$

Um $\mathfrak{s}_m$ für $m > s$ zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß die ν-te Person $(1 \leqq \nu \leqq n)$ zur Zeit $x_\nu + \mathfrak{s}_\nu t_0$ die Schaltergruppe verläßt, so daß die Zeitdifferenzen zwischen der Ankunft der m-ten und den Ab-

gängen der $m-1$ ihr vorangehenden Personen

$$x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq m-1) \tag{8}$$

lauten. Die m $(> s)$-te Person wird nun offenbar dann und nur dann wirklich abgefertigt, wenn zur Zeit ihrer Ankunft höchstens noch $s-1$ Personen an der Schaltergruppe abgefertigt werden, also mindestens $m-1-(s-1)=m-s$ Personen bereits abgegangen sind, d. i. wenn höchstens $s-1$ von den Zahlen (8) <0 und mindestens $m-s$ von ihnen $\geqq 0$ sind. Anders ausgedrückt: $\mathbf{s}_m$ ist dann und nur dann gleich 1, wenn die s-tkleinste der Zahlen (8) $\geqq 0$ ist.

§ 3.

Integraldarstellung eines Diskontinuitätsfaktors.

Um diesen Sachverhalt bequem niederschreiben zu können, führen wir eine Funktion $\mathbf{s}(a)$ („signum“) ein durch die Definition:

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}(a)=1, \quad a>0 \\ &\mathbf{s}(a)=0, \quad a<0; \end{aligned} \tag{9}$$

auf eine Definition von $\mathbf{s}(0)$ kann für unsere Anwendungen verzichtet werden.

Bezeichnet man die s-tkleinste einer Reihe von Zahlen mit $\mathrm{Min}^{(s)}$, so gilt dann gemäß dem früheren

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}\,[x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_0;\ \nu=1,2,\ldots,m-1] \qquad (s-1 \leqq m \leqq n), \tag{10}$$

wobei diejenigen Fälle, in denen etwa $\mathrm{Min}^{(s)}=0$ wäre, von der Betrachtung auszuschließen sind. Die Formel (10) ermöglicht zusammen mit (7) ersichtlich, $\mathbf{s}_m$ für alle m rekursiv aus $x_1, \ldots, x_m$ zu berechnen; unsere weitere Aufgabe, die Integrationen (6) auszuführen, ließe sich mittels des im folgenden benutzten Kunstgriffes (s. Gleichung (33) bis (35)) sogleich formal erledigen, wenn es gelänge, $\mathbf{s}_m$ in der Form

$$\mathbf{s}_m(x_1, \ldots, x_m) = \int \ldots \int e^{\sum_1^m x_i p_i} F(p_1, \ldots, p_m)\, dp_1 \ldots dp_m,$$

erstreckt über eine geeignete Mannigfaltigkeit des komplexen Raumes der p_ν, auszudrücken, d. h. $\mathbf{s}_m$ als komplexes Fourierintegral bezüglich der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ zu schreiben. Da aber die Ableitung einer derartigen Darstellung zu umständlich ist, schlagen wir einen anderen Weg ein. Wir stellen $\mathbf{s}_m$ zunächst als Fourierintegral bezüglich der Variablen (8) dar, integrieren sodann nach x_m und schreiben das Ergebnis wieder als Fourierintegral bezüglich der Größen $x_{m-1} - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_0$ $(\nu=1, 2, \ldots, m-2)$; dieses Verfahren, das immerhin noch erheblichen Aufwand an formaler Rechnung erfordert, wird dann iteriert.

Die Darstellung von $\mathbf{s}_m$ (Gleichung (10)) als Fourierintegral in den Größen (8) führen wir in zwei Schritten durch, indem wir zuerst die Funktion $\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)$ durch die Funktionen $\mathbf{s}(a_i)$ (s. (9)) ausdrücken und sodann die Tatsache benutzen, daß $\mathbf{s}(a)$ ja durch den Dirichletschen diskontinuierlichen Faktor dargestellt werden kann:

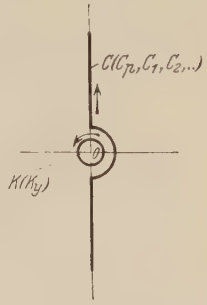


Fig. 1.

$$(11) \qquad \mathbf{s}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{az}}{z}\,dz \quad (C \text{ nach Fig. 1}),$$

also ein „komplexes Fourierintegral" in unserem Sinne ist. Zunächst gilt im einfachsten Fall $s = 1$, daß das Minimum von n Zahlen

$$(12) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (a_\nu \neq 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann > 0 ist, wenn sämtliche a_ν positiv sind; daher ist

$$(13) \qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{\nu=1}^{n} \mathbf{s}(a_\nu) \qquad (s = 1).$$

Um eine analoge Bezeichnung für $s = 2$ zu finden, hat man die n Zahlensysteme

$$(14) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zu betrachten; wie man erkennt, haben im allgemeinen $n - 1$ unter den Systemen (14) dieselbe kleinste Zahl wie das System (12), während in einem System (14) die zweitkleinste Zahl aus (12) zur kleinsten wird. Daher gilt

$$(15) \qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(2)}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ (\nu \neq i)}}^{n}{}' \mathbf{s}(a_\nu) - (n-1)\prod_{\nu=1}^{n} \mathbf{s}(a_\nu) \qquad (s = 2).$$

Auf diese Weise fortschreitend, gelangt man zu der allgemeinen Formel

$$(16) \qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)$$

$$= \Sigma^{(s-1)} - (n-s+1)\Sigma^{(s-2)} + \binom{n-s+2}{2}\Sigma^{(s-3)} + \ldots + (-1)^{s-1}\binom{n-1}{s-1}\Sigma^{(0)}$$

$$(1 \leqq s \leqq n),$$

worin gesetzt ist

$$(16a) \qquad \Sigma^{(s-1)} = \sum_{1', \ldots, (n-s+1)'} \mathbf{s}(a_{1'}) \ldots \mathbf{s}(a_{(n-s+1)'}), \ \ldots, \ \Sigma^{(0)} = \mathbf{s}(a_1) \ldots \mathbf{s}(a_n);$$

$\Sigma^{(k)}$ ist also die Summe über alle $\binom{n}{k}$ Produkte aus je $n - k$ verschiedenen Faktoren $\mathbf{s}(a_i)$.

Die gesuchte Fourierdarstellung folgt nun im Falle $s=1$ aus (13), (11) zu

$$\mathbf{s}\,\mathrm{Min}(a_1,\ldots,a_n) \tag{17}$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{e^{a_\nu p_\nu}}{p_\nu}\,dp_\nu=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}\cdots\int_{C_n}\frac{e^{\sum_1^n a_\nu p_\nu}}{\prod_1^n p_\nu}\,dp_1\ldots dp_n \qquad (s=1).$$

Um zu einem entsprechenden Ausdruck im Falle $s=2$ zu gelangen, setzen wir in jedem Summanden der Summe Σ von (15) an Stelle des fehlenden Faktors $\mathbf{s}(a_i)$ formal das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_i}\frac{e^{a_i p_i}}{p_i}\,dp_i=1, \tag{18}$$

in positivem Sinne erstreckt über einen kleinen Kreis K_i (Fig. 1) um den Nullpunkt der p_i-Ebene hinzu; hierdurch ergibt sich für $\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(2)}$ aus (15), (11) das vielfache Integral

$$\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(2)}(a_1,\ldots,a_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{S_{n,2}}\cdots\int\frac{e^{\sum_1^n a_\nu p_\nu}}{\prod_1^n p_\nu}\,dp_1\ldots dp_n \qquad (s=2), \tag{19}$$

erstreckt über die Integrationsmannigfaltigkeit

$$S_{n,2}=K_1C_2\ldots C_n+C_1K_2\ldots C_n+\ldots+C_1C_2\ldots C_{n-1}K_n-(n-1)C_1C_2\ldots C_n. \tag{19a}$$

Durch Anwendung des gleichen Verfahrens auf (16), (16a) erhält man die Formel

$$\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1,\ldots,a_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{S_{n,s}}\cdots\int\frac{e^{\sum_1^n a_\nu p_\nu}}{\prod_1^n p_\nu}\,dp_1\ldots dp_n \qquad (1\leqq s\leqq n), \tag{20}$$

mit

$$S_{n,s}=S_n^{(s-1)}-(n-s+1)S_n^{(s-2)}+\ldots+(-1)^{s-1}\binom{n-1}{s-1}S_n^{(0)} \tag{20a}$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\binom{n-s+k}{k}S_n^{(s-1-k)} \qquad (1\leqq s\leqq n)$$

und

$$S_n^{(k)}=\sum_{1',\ldots,k'}K_{1'}K_{2'}\ldots K_{k'}C_{(k+1)'}\ldots C_{n'} \qquad (k=0,1,2,\ldots), \tag{20b}$$

wobei die Summe Σ in (20b) über alle $\binom{n}{k}$ Kombinationen zu je k der n Indizes $1,\ldots,n$ zu erstrecken ist.

Die Integrationsmannigfaltigkeit $S_{n,s}$ von (20), die sich zunächst als Summe über Produkte aus linearen Mannigfaltigkeiten K und C ergeben hat, soll jetzt zur Erleichterung späterer Entwicklungen auf andere Weise zerlegt werden. Bezeichnet man mit C' (Fig. 2) das Spiegelbild von C an der imaginären Achse, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{e^{ap}}{p}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{ap}}{p}\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{e^{ap}}{p}\,dp,$$

so daß in den Produkten von (20b)

$$K_\nu = C_\nu + C'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

eingesetzt werden kann. Mit der Bezeichnung

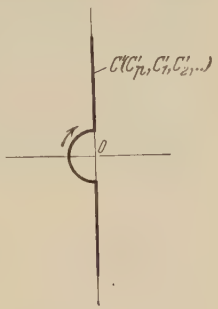


Fig. 2.

$$\tilde{S}_n^{(k)} = \sum_{1',\ldots,k'} C'_{1'} C'_{2'} \ldots C'_{k'} C_{(k+1)'} \ldots C_{n'} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ \tilde{S}_n^{(0)} = S_n^{(0)}) \tag{22}$$

folgt dadurch aus (20b)

$$S_n^{(k)} = \sum_{\tau=0}^{k} \binom{n-k+\tau}{\tau} \tilde{S}_n^{(k-\tau)} \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{23}$$

und aus (20a), (23) wird

$$\sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \binom{n-s-k}{k} S_n^{(s-1-k)} = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\tau=0}^{s-1-k} (-1)^k \binom{n-s+k}{k} \binom{n-s+1+k+\tau}{\tau} \tilde{S}_n^{(s-1-k-\tau)}$$

$$= \sum_{k+\tau=0}^{s-1} \binom{n-s+1+k+\tau}{k+\tau} \tilde{S}_n^{(s-1-k-\tau)} \sum_{k=0}^{k+\tau} (-1)^k \binom{k+\tau}{k} \cdot \frac{n-s+1}{n-s+1+k}$$

$$= \sum_{k+\tau=0}^{s-1} \binom{n-s+1+k+\tau}{k+\tau} \tilde{S}_n^{(s-1-k-\tau)} \frac{(k+\tau)!\,(n-s+1)!}{(n-s+1+k+\tau)!} = \sum_{k+\tau=0}^{s-1} \tilde{S}_n^{(s-1-k-\tau)},$$

also

$$S_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \tilde{S}_n^{(k)} \qquad (1 \leqq s \leqq n); \tag{24}$$

dies ist die neue Zerlegung von $S_{n,s}$.

§ 4.

Verallgemeinerung der Problemstellung.

Ehe wir nun die Integraldarstellung (20) mit (24), (22) auf Gleichung (10) anwenden, soll das Ausgangsschema und die anfängliche Fragestellung verallgemeinert werden. Wir lassen nämlich die Beschränkung auf eine einzige Abfertigungszeit t_0 fallen und lassen jetzt für jede der n Personen einige oder alle Werte t eines bestimmten Intervalls

$$(0 \leqq)\, t' \leqq t \leqq t'', \tag{25}$$

— jedes t mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit —, als virtuelle Abfertigungszeiten zu. Um diese Erweiterung möglichst allgemein zu fassen, denken wir uns für jedes t des Intervalls (25) die Wahrscheinlichkeit $f(t)$ dafür, daß die Abfertigungszeit einer Person $\leqq t$ ist, vorgegeben und setzen von dieser im allgemeinen unstetigen „Verteilungsfunktion“ $f(t)$ sinngemäß nichts anderes voraus, als daß sie im Intervall (25) nicht abnehme, und daß sie den Bedingungen

$$f(t'-0)=0, \qquad f(t''+0)=1 \tag{26a}$$

und daher

$$\int_{t'-0}^{t''+0} df(t)=1 \tag{26b}$$

genüge; das Integral (26b) ist, gleich allen folgenden auf die Variablen t_ν bezüglichen (für welche der Kürze halber immer $\int_{t'}^{t''}$ statt $\int_{t'-0}^{t''+0}$ geschrieben wird), als Stieltjesintegral zu verstehen; als obere Intervallgrenze soll auch der Wert $t''=\infty$ zugelassen werden.

Um nun den Gesprächsverlust v des so verallgemeinerten Schemas zu berechnen, hat man folgendermaßen vorzugehen: Man hat den ersten $n-1$ Personen außer ihren Ankunftszeiten (1) noch $n-1$ virtuelle Abfertigungszeiten

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \tag{27}$$

zuzuordnen (von t_n hängt v nicht ab), sodann das $v=v(x_1,\ldots,x_n;\, t_1,\ldots,t_{n-1})$ des Einzelfalles zu bestimmen und zur Berechnung des Erwartungswertes v sowohl über die Variablen x_ν als auch über die t_ν zu mitteln. Der Mittelwert von v bezüglich der x_ν (Gleichung (2)) sei jetzt mit $\bar{v}\,(t_1,\ldots,t_{n-1})$ bezeichnet; gemäß der Bedeutung der Verteilungsfunktion $f(t)$ ist dann der Erwartungswert $\bar{\bar{v}}$ so zu bilden:

$$\bar{\bar{v}}=\int_{t'}^{t''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{n-1})\,\bar{v}\,(t_1,\ldots,t_{n-1}). \tag{28}$$

Setzt man ebenso für den Erwartungswert $\mathfrak{s}_m$ von $\mathfrak{s}_m$ (Gleichung (6))

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathfrak{s}}}_m &= \int_{t'}^{t''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{n-1})\,\bar{\mathfrak{s}}_m(t_1,\ldots,t_{m-1}) \\ &= \int_{t'}^{t''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{m-1})\cdot\frac{n!}{T^n}\int_0^T dx_1\ldots\int_{x_{m-1}}^{T}\mathfrak{s}_m(x_1,\ldots,x_m;\, t_1,\ldots,t_{m-1})\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\end{aligned} \tag{29}$$

so folgt mit (5)

$$\bar{\bar{v}}=1-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{\bar{\mathfrak{s}}}_m. \tag{30}$$

Die früher zur Ableitung der Formel (10) angestellten Betrachtungen bleiben auch im allgemeinen Falle gültig; nur lautet der Abgangszeitpunkt der ν-ten Person jetzt $x_\nu + \mathbf{s}_\nu t_\nu$, so daß für $\mathbf{s}_m$ jetzt die Formeln (7) und

(31) $\mathbf{s}_m = \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}[x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots, m-1],\ (s+1 \leqq m \leqq n)$

gelten.

Wir nehmen im folgenden, um auch die Fälle $x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_\nu = 0$ einzuschließen, alle Integrale $\int_C$ oder $\int_{C'}$ als Cauchysche Hauptwerte,

$$\left(\text{also } \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{ap}}{p}\,dp = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-iN}^{iN}\frac{e^{ap}}{p}\,dp, \text{ usw.}\right)$$

und schreiben von jetzt ab der Kürze halber immer

(31a) $$\frac{1}{(2\pi i)^n}\mathfrak{S}_{n,s}F(p_1, \ldots, p_n)\,dp_1 \ldots dp_n$$

statt

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\ldots\int_{S_{n,s}} F(p_1, \ldots, p_n)\,dp_1 \ldots dp_n.$$

Hiermit folgt aus (31), (20) (gewisse höchstens $(n-1)$-dimensionale lineare Teilmannigfaltigkeiten von (1) ausgenommen)

(32) $$\mathbf{s}_m = \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\mathfrak{S}_{m-1,s}\frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_\nu)}}{\prod_1^{m-1} p_\nu}\,dp_1 \ldots dp_{m-1}$$

und es handelt sich nun darum, an dem Produkt $\mathbf{s}_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}$ die einzelnen durch (29) angezeigten Integrationen vorzunehmen. Hierzu bedienen wir uns folgenden das weitere sehr erleichternden Kunstgriffes: Wir schreiben den zweiten Integrandenfaktor $\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}$ ebenfalls als komplexes Integral und setzen, mit einer weiteren komplexen Variablen p,

(33) $$\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}}\,dp,$$

erstreckt über eine Parallele C_p rechts von der imaginären p-Achse. Aus (32), (33), (29) folgt

(34) $$\bar{\mathbf{s}}_m = \int_{t'}^{t''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{m-1})\,\frac{n!}{T^n}\int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{m-1}}^T dx_m$$

$$\times\,\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{C_p}\mathfrak{S}_{m-1,s}\frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (x_m - x_\nu - \mathbf{s}_\nu t_\nu) + p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}\prod_1^{m-1} p_\nu}\,dp\,dp_1 \ldots dp_{m-1}$$

und hierin darf $\int_{x_{m-1}}^{T} \dots dx_m$ ersichtlich durch formale Integration des innersten Integranden ausgeführt werden; dies gibt

$$(35)\quad \left[-\frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (x_m - x_\nu - s_\nu t_\nu) + p(T-x_m)}}{p^{n-m+1} \prod_1^{m-1} p_\nu \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu \right)} \right]_{x_{m-1}}^{T} = \frac{e^{\sum_1^{m-2} p_\nu (x_{m-1} - x_\nu - s_\nu t_\nu) - p_{m-1} s_{m-1} t_{m-1} + p(T-x_{m-1})}}{p^{n-m+1} \prod_1^{m-1} p_\nu \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu \right)}$$

$$- \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (T - x_\nu - s_\nu t_\nu)}}{p^{n-m+1} \prod_1^{m-1} p_\nu \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu \right)},$$

und wenn der Abstand der Integrationskurve C_p von der imaginären Achse von vornherein so groß gewählt wird, daß für alle p auf C_p und alle p_ν auf C_ν bzw. C_ν'

$$(35a)\qquad \Re\left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu \right) > 0$$

gilt, so verschwindet offensichtlich das über den Subtrahenden von (35) erstreckte Integral $\int_{C_p} \dots dp$. Daher wird

$$(36)\quad \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{C_p} S_{m-1,s} P_{m-2} \frac{e^{-p_{m-1} s_{m-1} t_{m-1}}}{p_{m-1} \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu \right)} dp\, dp_1 \dots dp_{m-1},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$(36a)\quad P_\lambda = \frac{e^{\sum_1^{\lambda} p_\nu (x_{\lambda+1} - x_\nu - s_\nu t_\nu) + p(T - x_{\lambda+1})}}{p^{n-m+1} \prod_1^{\lambda} p_\nu} \qquad \left(\lambda = 0, 1, \dots, m-1;\ \sum_1^0 \equiv 0,\ \prod_1^0 \equiv 1 \right).$$

Für den letzten Zählerfaktor in (36) gilt, da s_{m-1} ja nur die beiden Werte 1 oder 0 annehmen kann,

$$(37)\qquad e^{-p_{m-1} s_{m-1} t_{m-1}} = 1 + s_{m-1} (e^{-p_{m-1} t_{m-1}} - 1),$$

und hiermit folgt aus (36)

$$\int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{C_p} S_{m-1,s} P_{m-2} \frac{1}{p - \sum_1^{m-1} p_\nu} \left(\frac{1}{p_{m-1}} + s_{m-1} \frac{e^{-p_{m-1} t_{m-1}} - 1}{p_{m-1}} \right) dp \dots dp_{m-1}.$$

Hierin sei jetzt auch die in (29) angezeigte Operation $\int_{t'}^{t''} \dots df(t_{m-1})$ aus-

geführt, die wegen (26b) nur den einzigen von t_{m-1} abhängigen Integrandenbestandteil $e^{-p_{m-1}t_{m-1}}$ verändert. Führt man die (im Falle $t''=+\infty$ ganze transzendente) Funktion

$$\varepsilon(z)=\int_{t'-0}^{t''+0} e^{zt}\,df(t) \tag{38}$$

ein, für welche nach (26b)

$$\varepsilon(0)=1 \tag{38a}$$

gilt, so wird

$$\int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m \tag{39}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{C_p} S_{m-1,s}\,P_{m-2}\,\frac{1}{p-\sum_1^{m-1}p_\nu}\left(\frac{1}{p_{m-1}}+\mathfrak{s}_{m-1}\frac{\varepsilon(-p_{m-1})-1}{p_{m-1}}\right)dp\ldots dp_{m-1}.$$ [2])

§ 5.

Umformung der Gleichung (39).

In (39) kann der Anteil des Summanden $\frac{1}{p_{m-1}}$ nach dp_{m-1} ausintegriert werden, da P_{m-2} gemäß (36a) die Variable p_{m-1} nicht enthält. Nach (24) ist $S_{m-1,s}=\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{S}_{m-1}^{(k)}$, und nach (22) kann geschrieben werden

$$\tilde{S}_{m-1}^{(k)}=\tilde{S}_{m-2}^{(k)}C_{m-1}+\tilde{S}_{m-2}^{(k-1)}C'_{m-1}\quad(k=0,1,2,\ldots;\ S_{m-2}^{(-1)}\equiv 0), \tag{40}$$

wobei sich die Symbole $\tilde{S}_{m-2}^{(k)}$, $\tilde{S}_{m-2}^{(k-1)}$ auf die Variablen $p_1,\ldots,p_{m-2}$ beziehen.

Weiter ist wegen (35a) ersichtlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{m-1}}\frac{dp_{m-1}}{p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1}p_\nu\right)}=\frac{1}{p-\sum_1^{m-2}p_\nu},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_{m-1}}\frac{dp_{m-1}}{p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1}p_\nu\right)}=0 \tag{41}$$

und daher

$$\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}S_{m-1,s}\,P_{m-2}\,\frac{dp_1\ldots dp_{m-1}}{p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1}p_\nu\right)} \tag{42}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{S}_{m-1}^{(k)}\ldots=\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{k=0}^{s-1}(\tilde{S}_{m-2}^{(k)}C_{m-1}+\tilde{S}_{m-2}^{(k-1)}C'_{m-1})\ldots$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{S}_{m-2}^{(k)}\,P_{m-2}\,\frac{1}{p-\sum_1^{m-2}p_\nu}\,dp_1\ldots dp_{m-2}.$$

[2]) Für $t''=\infty$ sei der Kürze halber hier und in den beiden folgenden Paragraphen die Konvergenz des Integrals (38) auch für ein $z=c>0$ vorausgesetzt — eine Annahme, die durch Abänderung unseres formalen Rechnungsganges vermieden werden könnte.

Für den Anteil des Summanden $\frac{\varepsilon(-p_{m-1})-1}{p_{m-1}}$ in (39) gilt folgendes: Wegen (38a) ist

$$(43)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{m-1}} \frac{\varepsilon(-p_{m-1})-1}{p_{m-1}}\,dp_{m-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{m-1}} \frac{\varepsilon(-p_{m-1})-1}{p_{m-1}}\,dp_{m-1};$$

führt man zur Abkürzung einen Operator $\varphi(z)$ ein durch

$$(44)\quad \varphi(z)\,F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\varepsilon(-z)-1}{z}\,F(z)\,dz; \qquad \varphi_\nu \equiv \varphi(p_\nu),$$

so wird mit (40), (43), (44)

$$(45)\quad \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\,S_{m-1,s}\,P_{m-2}\,\frac{1}{p-\sum\limits_1^{m-1} p_\nu}\,\frac{\varepsilon(-p_{m-1})-1}{p_{m-1}}\,dp_1\dots dp_{m-1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{S}^{(k)}_{m-1}\dots = \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{k=0}^{s-1}(\tilde{S}^{(k)}_{m-2}\,C_{m-1}+\tilde{S}^{(k-1)}_{m-2}\,C'_{m-1})\dots$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\sum_{k=0}^{s-1}(\tilde{S}^{(k)}_{m-2}-\tilde{S}^{(k-1)}_{m-2})\,C_{m-1}\dots$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\,\tilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\varphi_{m-1}\,\frac{1}{p-\sum\limits_1^{m-1} p_\nu}\,dp_1\dots dp_{m-2}.$$

Aus (39), (42), (45) folgt dann

$$(46)\quad \int\limits_{t'}^{t''} df(t_{m-1})\int\limits_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}_m\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\Bigg[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\,\tilde{S}^{(k)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{1}{p-\sum\limits_1^{m-2} p_\nu}\,dp_1\dots dp_{m-2}$$

$$+\,\mathfrak{s}_{m-1}\,\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\,\tilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\varphi_{m-1}\,\frac{1}{p-\sum\limits_1^{m-1} p_\nu}\,dp_1\dots dp_{m-2}\Bigg]\,dp.$$

Sämtliche Summanden des Klammerausdrucks [...], mit Ausnahme des letzten, sind gemäß (36a) Fourierintegrale bzgl. der $m-2$ Größen

$$(46a)\quad x_{m-1}-x_\nu-\mathfrak{s}_\nu t_\nu \qquad (1\leqq\nu\leqq m-2);$$

der letzte Summand aber ist wegen des Faktors $\mathfrak{s}_{m-1}$ (s. (32)) ein Produkt zweier solcher Fourierintegrale, und es handelt sich nun darum, dieses Produkt in ein einziges Fourierintegral bezüglich der Größen (46a) umzuformen. Nach (32), (24) gilt (T, D, D', q_ν statt S, C, C', p_ν geschrieben)

$$(47)\quad \mathfrak{s}_{m-1} = \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\,T_{m-2,s}\,\frac{e^{\sum\limits_1^{m-2} q_\nu(x_{m-1}-x_\nu-\mathfrak{s}_\nu t_\nu)}}{\prod\limits_1^{m-2} q_\nu}\,dq_1\dots dq_{m-2} \quad (m-1>s)$$

mit

$$(47\,a)\quad T_{m-2,\,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \tilde{T}_{m-2}^{(k)} = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{1',\ldots,k'} D_{1'}' D_{2'}' \ldots D_{k'}' D_{(k+1)'} \ldots D_{(m-2)'},$$

und hiermit und mit (36 a) erhält man für dieses Produkt

$$(48)\quad \mathfrak{s}_{m-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} P_{m-2} \frac{1}{p - \sum_1^{m-1} p_\nu}\, dp_1 \ldots dp_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi i)^{2m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} \sum_{k=0}^{s-1} \tilde{T}_{m-2}^{(k)} \frac{e^{\sum_1^{m-2} (p_\nu + q_\nu)(x_{m-1} - x_\nu - \mathfrak{s}_\nu t_\nu) + p(T - x_{m-1})}}{\prod_{\nu=1}^{m-2} (p_\nu q_\nu)\left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu\right) p^{n-m+1}}\, dp_1 \ldots dq_{m-2}.$$

Die Umwandlung in ein $(m-2)$-faches Fourierintegral geht in diesem besonderen Falle sehr einfach vor sich; nach (22), (47 a) gilt

$$(49)\quad \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} \tilde{T}_{m-2}^{(k)} = \sum_{1',\ldots,(s-1)'} C_{1'}' \ldots C_{(s-1)'}' C_{s'} \ldots C_{(m-2)'}$$
$$\times \sum_{1'',\ldots,k''} D_{1''}' \ldots D_{k''}' D_{(k+1)''} \ldots D_{(m-2)''} \quad (0 \leqq k \leqq s-1)$$

und im Falle $k < s-1$ muß in *jedem* der $\binom{m-2}{s-1}\binom{m-2}{k}$ Summanden dieses ausmultipliziert gedachten Ausdrucks mindestens *ein* Faktorenpaar $C_\nu' D_\nu$ von gleichem Index ν vorkommen, während im Falle $k = s-1$ nur die $\binom{m-2}{s-1}$ Glieder der Teilsumme

$$(49\,a)\quad \sum_{1',\ldots,(s-1)'} C_{1'}' \ldots C_{(s-1)'}' C_{s'} \ldots C_{(m-2)'} D_{1'}' \ldots D_{(s-1)'}' D_{s'} \ldots D_{(m-2)'} \quad (\prec \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} \tilde{T}_{m-2}^{(s-1)})$$

von solchen Faktorenpaaren frei sind.

Nun gilt aber für das zugehörige Teilintegral von (48)

$$(50)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_\nu'} \int_{D_\nu} \frac{e^{(p_\nu + q_\nu)(x_{m-1} - x_\nu - \mathfrak{s}_\nu t_\nu)}}{p_\nu q_\nu \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu\right)}\, dp_\nu\, dq_\nu = 0 \quad (1 \leqq \nu \leqq m-2),$$

wie unmittelbar zu erkennen ist; denn für $x_{m-1} - x_\nu - \mathfrak{s}_\nu t_\nu \geqq 0$ verschwindet $\int_{C_\nu'} \ldots dp_\nu$, und im entgegengesetzten Falle ist $\int_{D_\nu} \ldots dq_\nu = 0$. Daher verschwinden für $k < s-1$ die Integrale über sämtliche Summanden der Mannigfaltigkeit (49), also

$$(51)\quad \frac{1}{(2\pi i)^{2m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} \tilde{T}_{m-2}^{(k)} \ldots dp_1 \ldots dq_{m-2} = 0 \quad (0 \leqq k \leqq s-2),$$

und das Integral über $\tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} \tilde{T}_{m-2}^{(s-1)}$ reduziert sich auf ein Integral über die Mannigfaltigkeit (49 a). Jedem Summanden von (49 a) entspricht ein

Produkt von Teilintegralen der Form $\int\limits_{C_\nu'}\int\limits_{D_\nu'}$ oder $\int\limits_{C_\nu}\int\limits_{D_\nu}$, und es gilt

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_\nu'}\int\limits_{D_\nu'}\frac{e^{(p_\nu+q_\nu)(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)}}{p_\nu q_\nu\left(p-\sum_1^{m-1}p_k\right)}\,dp_\nu\,dq_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu'}\frac{e^{p_\nu(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)}}{p_\nu\left(p-\sum_1^{m-1}p_k\right)}\,dp_\nu,$$

(50a)

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_\nu}\int\limits_{D_\nu}\frac{e^{(p_\nu+q_\nu)(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)}}{p_\nu q_\nu\left(p-\sum_1^{m-1}p_k\right)}\,dp_\nu\,dq_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu}\frac{e^{p_\nu(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)}}{p_\nu\left(p-\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m-1}p_k\right)}\,dp_\nu.$$

Um diese Beziehungen formal abzuleiten, hätte man auf der linken Seite die Integrationsvariable q_ν durch eine neue Variable $p_\nu'=p_\nu+q_\nu$ zu ersetzen und sodann nach dem jetzt nicht mehr im Exponenten auftretenden p_ν zu integrieren; doch ist (50a) auch unmittelbar in der gleichen Weise wie (49a) zu verifizieren. Für das letzte Glied von $\sum_{k=0}^{s-1}$ in (48) folgt nun mit (49a) unter sukzessiver Anwendung von (50a)

(52)
$$\frac{1}{(2\pi i)^{2m-2}}\tilde{S}_{m-2}^{(s-1)}\tilde{T}_{m-2}^{(s-1)}\ldots dp_1\ldots dq_{m-2}$$

$$=\sum_{1',\ldots,(s-1)'}{}'\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\int\limits_{C_{1'}'}\cdots\int\limits_{C_{(s-1)'}'}\int\limits_{C_{s'}}\cdots\int\limits_{C_{(m-2)'}}\frac{e^{\sum_1^{m-2}p_\nu(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)+p(T-x_{m-1})}}{p^{n-m+1}\prod_1^{m-2}p_\nu(p-p_{1'}-\ldots-p_{(s-1)'}-p_{m-1})}\,dp_1\ldots$$

Wir führen hier, entsprechend (22), die folgende abkürzende Bezeichnung ein:

(53)
$$\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}}\tilde{S}_{m-\nu}^{(k)}P_{m-\nu}H_\nu^{(k)}\left(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\right)dp_1\ldots dp_{m-\nu}$$

$$=\sum_{1',\ldots,k'}{}'\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}}\int\limits_{C_{1'}'}\cdots\int\limits_{C_{k'}'}\int\limits_{C_{(k+1)'}}\cdots\int\limits_{C_{(m-\nu)'}}P_{m-\nu}H_\nu^{(k)}\left(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,\hat{p}_{k'}\right)dp_1\ldots dp$$

$$(0\leqq k\leqq s-1;\ 1\leqq\nu\leqq m-k),$$

wobei $H_\nu^{(k)}$ eine analytische, in $p_{1'},\ldots,p_{k'}$ symmetrische Funktion der $k+1$ Argumente $\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}$ sei. Mit dieser Bezeichnung folgt aus (48), (51), (52) für die nunmehr gewonnene „Fourier"darstellung des letzten Gliedes von (46)

(54)
$$s_{m-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\tilde{S}_{m-2}^{(s-1)}P_{m-2}\frac{1}{p-\sum_1^{m-1}p_\nu}\,dp_1\ldots dp_{m-2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\tilde{S}_{m-2}^{(s-1)}P_{m-2}\frac{1}{p-p_{1'}-\ldots-p_{(s-1)'}-p_{m-1}}\,dp_1\ldots dp_{m-2},$$

und aus (46) wird

$$\int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \Bigg[\sum_{k=0}^{s-2} \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(k)} P_{m-2} \frac{1}{p - \sum_1^{m-2} p_i}\, dp_1 \dots dp_{m-2}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(s-1)} P_{m-2} \left(\frac{1}{p - \sum_1^{m-2} p_i} + \varphi_{m-1} \frac{1}{p - p_{1'} - \dots - p_{(s-1)'} - p_{m-1}} \right) dp_1 \dots dp_{m-2} \Bigg] dp$$

$$(s+1 \leqq m \leqq n).$$

§ 6.

Rekursive Ausführung der Integrationen (29).

Die letzte Gleichung ist von der Gestalt

a)
$$\int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \Bigg[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-2}} \tilde{S}_{m-2}^{(k)} P_{m-2} B^{(k)} \left(\sum_1^{m-2} p_i ; p_{1'}, \dots, p_{k'} \right) dp_1 \dots dp_{m-2} \Bigg] dp$$

und wir können jetzt annehmen, daß bereits für ein $\nu \geqq 2$ die Formel

)
$$\int_{t'}^{t''} df(t_{m-\nu+1}) \dots \int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-\nu+1}}^{T} dx_{m-\nu+2} \dots \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \Bigg[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}} \tilde{S}_{m-\nu}^{(k)} P_{m-\nu} B_\nu^{(k)} \left(\sum_1^{m-\nu} p_i ; p_{1'} \dots p_{k'} \right) dp_1 \dots dp_{m-\nu} \Bigg] dp$$

erwiesen sei, mit $B_\nu^{(k)}$ als Polynom $(\nu-1)$-ten Grades in $\frac{1}{p - \sum_1^{m-\nu} p_i}$:

$$(57) \qquad B_\nu^{(k)} \left(\sum_1^{m-\nu} p_i ; p_{1'} \dots p_{k'} \right) = \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{b_{\nu,\sigma}^{(k)}(p_{1'}, \dots, p_{k'})}{\left(p - \sum_1^{m-\nu} p_i \right)^\sigma} \qquad (\nu = 1, 2, \dots),$$

dessen Koeffizienten $b_{\nu,\sigma}^{(k)}$ für

$$(57\,\text{a}) \qquad \Re(p - p_{1'} - \dots - p_{k'}) > 0 \quad \text{(s. (35 a))}$$

regulär und in $p_{1'}, \dots, p_{k'}$ symmetrisch seien; denn für $\nu = 2$ treffen diese Annahmen gemäß (55) ja zu. Desgleichen sind sie für $\nu = 1$ erfüllt, da

aus (32), (33), (36a), (24) folgt

$$(57b)\quad s_m \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\tilde{S}_{m-1}^{(k)}P_{m-1}\,dp_1\dots dp_{m-1}\right]dp.$$

Um nun zu einer Rekursionsformel für die $b_{\nu,\sigma}^{(k)}$ zu gelangen, üben wir auf (56) die Integrationen $\int_{t'}^{t''} df(t_{m-\nu})\int_{x_{m-\nu}}^{T}\dots dx_{m-\nu+1}$ aus und erhalten analog (39)

$$(58)\quad \int_{t'}^{t''} df(t_{m-\nu})\int_{x_{m-\nu}}^{T}\dots dx_{m-\nu+1}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}}\tilde{S}_{m-\nu}^{(k)}P_{m-\nu-1}B_\nu^{(k)}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\dots,p_{k'}\Big)\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\Big(\frac{1}{p_{m-\nu}}+s_{m-\nu}\frac{\varepsilon(-p_{m-\nu})-1}{p_{m-\nu}}\Big)\,dp_1\dots dp_{m-\nu}\right]dp.$$

Man kann nun, so wie in (39), den Anteil des Summanden $\frac{1}{p_{m-\nu}}$ nach $p_{m-\nu}$ ausintegrieren; da analog (40), (41)

$$\tilde{S}_{m-\nu}^{(k)} = \tilde{S}_{m-\nu-1}^{(k)}C_{m-\nu} + \tilde{S}_{m-\nu-1}^{(k-1)}C'_{m-\nu},\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{m-\nu}}\frac{dp_{m-\nu}}{p_{m-\nu}\Big(p-\sum_1^{m-\nu}p_i\Big)^h} = \frac{1}{\Big(p-\sum_1^{m-\nu-1}p_i\Big)^h},$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_{m-\nu}}\frac{dp_{m-\nu}}{p_{m-\nu}\Big(p-\sum_1^{m-\nu}p_i\Big)^h} = 0 \qquad (h=1,2,\dots)$$

gilt, erhält man im Hinblick auf (57)

$$(59)\quad \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}}\tilde{S}_{m-\nu}^{(k)}P_{m-\nu-1}B_\nu^{(k)}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\dots,p_{k'}\Big)\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\frac{1}{p_{m-\nu}}\,dp_1\dots dp_{m-\nu}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}_{m-\nu-1}^{(k)}P_{m-\nu-1}B_\nu^{(k)}\Big(\sum_1^{m-\nu-1}p_i;\,p_{1'},\dots,p_{k'}\Big)\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu-1}p_i}\,dp_1\dots dp_{m-}$$
$$(k=0,1,\dots,s-1).$$

Da weiter analog (43)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_{m-\nu}}\frac{1}{\Big(p-\sum_1^{m-\nu}p_i\Big)^h}\frac{\varepsilon(-p_{m-\nu})-1}{p_{m-\nu}}\,dp_{m-\nu} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{m-\nu}}\frac{1}{\Big(p-\sum_1^{m-\nu}p_i\Big)^h}\frac{\varepsilon(-p_{m-\nu})-1}{p_{m-\nu}}\,dp_m$$

ist, erhält man für den Anteil des Summanden $s_{m-\nu}\frac{\varepsilon(-p_{m-\nu})-1}{p_{m-\nu}}$ von (58) (mit der Bezeichnung (44))

$$\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}}\tilde{S}^{(k)}_{m-\nu}P_{m-\nu-1}B^{(k)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\,\frac{s(-p_{m-\nu})-1}{p_{m-\nu}}\,dp_1\ldots dp_{m-\nu}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}^{(k)}_{m-\nu-1}P_{m-\nu-1}\varphi_{m-\nu}B^{(k)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\,dp_1\ldots dp_{m-\nu-1}$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}^{(k-1)}_{m-\nu-1}P_{m-\nu-1}\varphi_{m-\nu}B^{(k)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{(k-1)'},p_{m-1}\Big)$$

$$\times\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\,dp_1\ldots dp_{m-\nu-1}\qquad(k=0,1,\ldots,s-1;\ B^{(-1)}_{\nu}\equiv 0).$$

Die Gleichungen (59), (61) ergeben, in (58) eingesetzt,

$$\int_{t'}^{t''}df(t_{m-\nu})\int_{x_{m-1}}^{T}\ldots dx_{m-\nu+1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\Bigg[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}^{(k)}_{m-\nu-1}P_{m-\nu-1}B^{(k)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu-1}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)$$

$$\times\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu-1}p_i}\,dp_1\ldots dp_{m-\nu-1}+s_{m-\nu}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}^{(k)}_{m-\nu-1}P_{m-\nu-1}$$

$$\times\varphi_{m-\nu}\Big(B^{(k)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)-B^{(k+1)}_{\nu}\Big(\sum_1^{m-\nu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'},p_{m-\nu}\Big)\Big)$$

$$\times\frac{1}{p-\sum_1^{m-\nu}p_i}\,dp_1\ldots dp_{m-\nu-1}\Bigg]dp\qquad(B^{(s)}_{\nu}\equiv 0),$$

und es ist nun hier, ähnlich wie in (46), erforderlich, das Produkt $s_{m-\nu}\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\tilde{S}^{(k)}_{m-\nu-1}P_{m-\nu-1}\ldots dp_1\ldots dp_{m-\nu-1}$ in ein Fourierintegral bezüglich der $m-\nu-1$ Variablen $x_{m-\nu}-x_i-s_it_i$ $(1\leqq i\leqq m-\nu-1)$ umzuwandeln. Es handelt sich also um die Umwandlung von Produkten der Form $s_{\mu+1}\frac{1}{(2\pi i)^{\mu}}\tilde{S}^{(k)}_{\mu}P_{\mu}F\Big(\sum_1^{\mu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)dp_1\ldots dp_{\mu}$, mit Funktionen F von der Art $B^{(k)}_{m-\mu}$ (s. (57), (57a)), und diese wird geleistet durch die Formel

$$s_{\mu+1}\frac{1}{(2\pi i)^{\mu}}\tilde{S}^{(k)}_{\mu}P_{\mu}F\Big(\sum_1^{\mu}p_i;\,p_{1'},\ldots,p_{k'}\Big)dp_1\ldots dp_{\mu}$$

$$=\sum_{\lambda=k}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{\lambda}}\tilde{S}^{(\lambda)}_{\mu}P_{\mu}\sum_{\varepsilon=k}^{\lambda}(-1)^{\varepsilon+k}\sum_{1',\ldots,\varepsilon'}\ \sum_{1'',\ldots,k''}F\Big(\sum_{1'}^{\varepsilon'}p_i;\,p_{1''},\ldots,p_{k''}\Big)dp_1\ldots dp_{\mu}$$

$$(\mu\geqq k).$$

Hierin ist die Doppelsumme $\sum\sum F$ folgendermaßen zu verstehen:

In jedem der Teilintegrale $\tilde{S}_{\mu}^{(\lambda)}$ hat man aus denjenigen λ Indizes, welche gemäß der Definition (53) (μ statt $m-\nu$) zu Integrationskurven C' gehören, auf jede mögliche Weise ε Indizes $1', \ldots, \varepsilon'$ auszuwählen, und aus jeder Kombination von letzteren Indizes sind nochmals alle möglichen Systeme $1'', \ldots, k''$ zu je k Elementen zu nehmen; $\sum\sum F$ ist daher eine Summe über $\binom{\lambda}{\varepsilon}\binom{\varepsilon}{k} = \frac{\lambda!}{(\lambda-\varepsilon)!\,(\varepsilon-k)!\,k!}$ Glieder.

Um den Beweis von (62), dessen Einzelheiten wir übergehen, durchzuführen, hätte man im Falle $\mu+1 > s$ für $\mathfrak{s}_{\mu+1}$ seine Fourierdarstellung analog (47) einzusetzen, wodurch die linke Seite von (62) in eine Summe von 2μ-fachen Integralen übergeht; jeder Summand besteht aus μ Teilintegralen von einer der Formen

$$\int\limits_{C_i'}\int\limits_{D_i'},\ \int\limits_{C_i'}\int\limits_{D_i},\ \int\limits_{C_i}\int\limits_{D_i'},\ \int\limits_{C_i}\int\limits_{D_i} \frac{e^{(p_i+q_i)(x_\mu - x_i - \mathfrak{s}_i t_i)}}{p_i\,q_i}\, F\Big(\sum_1^{\mu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}\Big)\, dp_i\, dq_i,$$

die analog (50), (50a) in einfache Fourierintegrale umgewandelt werden können, und läßt sich dadurch selbst als μ-faches Fourierintegral schreiben.

Im Falle $1 \leqq \mu+1 \leqq s$ aber stimmen beide Seiten von (62) identisch überein, wenn man gemäß (7) $\mathfrak{s}_{\mu+1} = 1$ und

$$S_{\mu}^{(x)} = 0 \qquad (x > \mu) \tag{62a}$$

setzt.

Bei Anwendung auf (61) ist in (62)

$$\mu = m - \nu - 1 \tag{62b}$$

und

$$F\Big(\sum_1^{\mu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}\Big) = \varphi_{m-\nu}\Big(B_{\nu}^{(k)}\Big(\sum_1^{m-\nu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}\Big) - B_{\nu}^{(k+1)}\Big(\sum_1^{m-\nu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}, p_{m-\nu}\Big)\Big)\frac{1}{p - \sum_1^{m-\nu} p_i}$$

zu setzen und über $k = 0, 1, \ldots, s-1$ zu summieren:

$$\mathfrak{s}_{m-\nu}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}}\,\tilde{S}_{m-\nu-1}^{(k)}\,P_{m-\nu-1}\,\varphi_{m-\nu}\Big(B_{\nu}^{(k)}\Big(\sum_1^{m-\nu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}\Big) - B_{\nu}^{(k+1)}\Big(\sum_1^{m-\nu} p_i;\, p_{1'}, \ldots, p_{k'}, p_{m-\nu}\Big)\Big)\frac{1}{p - \sum_1^{m-\nu} p_i}\, dp_1 \ldots dp_{m-\nu} \tag{63}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\lambda=k}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-1} \varphi_{m-\nu} \sum_{\varepsilon=k}^{\lambda} (-1)^{\varepsilon+k} \sum_{1',\ldots,\varepsilon'} \sum_{1'',\ldots,k''}$$

$$\times \left(B^{(k)}_{\nu} \left(\sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i + p_{m-\nu}; p_{1''}, \ldots, p_{k''} \right) - B^{(k+1)}_{\nu} \left(\sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i + p_{m-\nu}; p_{1''}, \ldots, p_{k''}, p_{m-\nu} \right) \right)$$

$$\times \frac{1}{p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - p_{m-\nu}} dp_1 \ldots dp_{m-\nu-1}.$$

Wir vertauschen nun die Reihenfolge der Summationen nach k und λ:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\lambda=k}^{s-1} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-1} \varphi_{m-\nu} \sum_{k=0}^{\lambda} \sum_{\varepsilon=k}^{\lambda} \ldots;$$

wird außerdem (57) benutzt und ξ statt $p_{m-\nu}$, bzw. $\varphi(\xi)$ statt $\varphi_{m-\nu}' = \varphi(p_{m-\nu})$ geschrieben, so wird aus (63)

$$(64) \qquad s_{m-\nu} \sum_{k=0}^{s-1} \ldots = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-1} \sum_{k=0}^{\lambda} \sum_{\varepsilon=k}^{\lambda} (-1)^{\varepsilon+k}$$

$$\times \sum_{1',\ldots,\varepsilon'} \sum_{1'',\ldots,k''} \varphi(\xi) \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{b^{(k)}_{\nu,\sigma}(p_{1''}, \ldots, p_{k''}) - b^{(k+1)}_{\nu,\sigma}(p_{1''}, \ldots, p_{k''}, \xi)}{\left(p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - \xi\right)^{\sigma+1}} dp_1 \ldots dp_{m-\nu-1}.$$

Setzt man dies, nach Vertauschung der Buchstaben λ und k, in Gleichung (61) ein und nimmt im ersten Summanden von (61) ebenfalls für $B^{(k)}_{\nu}$ den Ausdruck (57), so folgt

$$(65) \quad \int_{t'}^{t''} df(t_{m-\nu}) \int_{x_{m-1}}^{T} \ldots dx_{m-\nu-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu-1}} \tilde{S}^{(k)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-1} \right.$$

$$\times \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \left\{ \frac{b^{(k)}_{\nu,\sigma}(p_{1'}, \ldots, p_{k'})}{\left(p - \sum_{1}^{m-\nu-1} p_i\right)^{\sigma+1}} + \varphi(\xi) \sum_{\lambda=0}^{k} \sum_{\varepsilon=\lambda}^{k} \sum_{1',\ldots,\varepsilon'} \frac{(-1)^{\varepsilon+\lambda}}{\left(p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - \xi\right)^{\sigma}} \right.$$

$$\left. \left. \times \sum_{1'',\ldots,\lambda''} (b^{(\lambda)}_{\nu,\sigma}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}) - b^{(\lambda+1)}_{\nu,\sigma}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}, \xi)) \right\} dp_1 \ldots dp_{m-\nu-1} \right] dp$$

Der Vergleich der letzten Gleichung mit (56), (57), (57a) zeigt nun, daß (56) auch für $\nu+1$ gültig bleibt, und zwar kann man, da wir nur die für $\mu \geqq 0$ gültige Formel (62) benutzten, so für alle ν, für welche der Ausdruck (62b) $\geqq 0$ ist, schließen; (56) gilt also für $1 \leqq \nu \leqq m$. Für die Koeffizienten von $B^{(k)}_{\nu+1}$ folgen die Rekursionsformeln

$$(66\,a)\qquad b^{(k)}_{\nu+1,0}(p_1,\ldots,p_k)=\varphi(\xi)\sum_{\sigma=0}^{\nu-1}\sum_{\lambda=0}^{k}\sum_{\varepsilon=\lambda}^{k}\sum_{1',\ldots,\varepsilon'}\frac{(-1)^{\varepsilon+\lambda}}{\left(p-\sum_{1'}^{\varepsilon'}p_i-\xi\right)^{\sigma+1}}$$
$$\times\sum_{1'',\ldots,\lambda''}\left(b^{(\lambda)}_{\nu,\sigma}(p_{1''},\ldots,p_{\lambda''})-b^{(\lambda+1)}_{\nu,\sigma}(p_{1''},\ldots,p_{\lambda''},\xi)\right)$$
$$(\nu=1,2,\ldots;\ k=0,1,\ldots,s-1);$$

$$(66\,b)\qquad b^{(k)}_{\nu+1,\sigma}(p_1,\ldots,p_k)=b^{(k)}_{\nu,\sigma-1}(p_1,\ldots,p_k)$$
$$(\sigma=1,2,\ldots,\nu;\ \nu=1,2,\ldots;\ k=0,1,\ldots,s-1);$$

hierzu treten die aus (56) ($\nu=1$), (57), (57 b) zu entnehmenden Gleichungen

$$(66\,c)\qquad b^{(k)}_{1,0}(p_1,\ldots,p_k)=1\qquad(k=0,1,\ldots,s-1).$$

Aus (66 b) folgt

$$(66\,d)\qquad b^{(k)}_{\nu+1,\sigma}(p_1,\ldots,p_k)=\ldots=b^{(k)}_{\nu+1-\sigma,0}(p_1,\ldots,p_k)\qquad(\nu+1-\sigma>0),$$

und dies gibt, in (66 a) eingesetzt,

$$(67)\qquad b^{(k)}_{\nu+1,0}(p_1,\ldots,p_k)=\varphi(\xi)\sum_{\sigma=0}^{\nu-1}\sum_{\lambda=0}^{k}\sum_{\varepsilon=\lambda}^{k}\sum_{1',\ldots,\varepsilon'}\frac{(-1)^{\varepsilon+\lambda}}{\left(p-\sum_{1'}^{\varepsilon'}p_i-\xi\right)^{\sigma+1}}$$
$$\times\sum_{1'',\ldots,\lambda''}\left(b^{(\lambda)}_{\nu-\sigma,0}(p_{1''},\ldots,p_{\lambda''})-b^{(\lambda+1)}_{\nu-\sigma,0}(p_{1''},\ldots,p_{\lambda''},\xi)\right)$$
$$(\nu=1,2,\ldots;\quad 0\leqq k\leqq s-1).$$

§ 7.

Einführung der Lösungen eines Systems linearer Integralgleichungen.

Wir bilden nunmehr s erzeugende Funktionen der $b^{(k)}_{\nu,0}$ mittels

$$(68)\qquad \mathsf{B}_k(p_1,\ldots,p_k;p,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}y^{\nu-1}\,b^{(k)}_{\nu,0}(p_1,\ldots,p_k)\quad(k=0,1,\ldots,s-1)$$

und nehmen vorbehaltlich des späteren Beweises vorweg, daß diese Potenzreihen nur von $\varepsilon(z)$ und von den Größen

$$a_k=\Re\left(p-\sum_{i=1}^{k}p_i\right)>0$$

abhängige Konvergenzradien $\varrho_k>0$ haben; zugleich mit den $b^{(k)}_{\nu,0}$ sind auch die B_k symmetrisch in $p_1,\ldots,p_k$.

Aus (68) folgt dann

$$(69)\qquad b^{(k)}_{\nu,0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_y}\frac{\mathsf{B}_k}{y^{\nu}}\,dy\qquad(\nu=1,2,\ldots;\ k=0,1,\ldots,s-1)$$

(erstreckt über einen hinreichend kleinen Kreis K_y um den Nullpunkt der y-Ebene) und mit (57), (66d)

$$(69a)\qquad B_\nu^{(k)}\left(\sum_1^{m-\nu} p_i;\ p_1, \dots, p_k\right) = \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{b_{\nu-\sigma,0}^{(k)}(p_1, \dots, p_k)}{\left(p - \sum_1^{m-\nu} p_i\right)^\sigma}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_y} \mathsf{B}_k \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \frac{y^{\sigma-\nu}}{\left(p - \sum_1^{m-\nu} p_i\right)^\sigma}\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_y} \frac{\mathsf{B}_k}{y^\nu} \frac{1 - \dfrac{y^\nu}{\left(p - \sum_1^{m-\nu} p_i\right)^\nu}}{1 - \dfrac{y}{p - \sum_1^{m-\nu} p_i}}\, dy.$$

Mit (69a) wird aus (56)

$$(70)\quad \int_{t'}^{t''} df(t_{m-\nu+1}) \dots \int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-\nu+1}}^{T} dx_{m-\nu+2} \dots \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(2\pi i)^{m-\nu}} \tilde{S}_{m-\nu}^{(k)} P_{m-\nu} \frac{\mathsf{B}_k}{y^\nu} \frac{1 - \dfrac{y^\nu}{\left(p - \sum_1^{m-\nu} p_i\right)^\nu}}{1 - \dfrac{y}{p - \sum_1^{m-\nu} p_i}}\, dp_1 \dots dp_{m-\nu} \right) dp\, dy$$

und da (56) nach früherem für $1 \leqq \nu \leqq m$ gilt, darf hier insbesondere $\nu = m$ gesetzt werden, so daß man mit (36a) und (62a) erhält

$$(70a)\qquad \int_{t'}^{t''} df(t_1) \dots \int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_1}^{T} dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^{T} s_m \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{p(T - x_1)}}{p^{n-m+1} y^m} \frac{1 - \dfrac{y^m}{p^m}}{1 - \dfrac{y}{p}} \mathsf{B}_0(p, y)\, dp\, dy.$$

Um s_m zu erhalten, hat man an diesem Ausdruck gemäß (34) noch die Operation $\frac{n!}{T^n} \int_0^T \dots dx_1$ auszuführen; dies gibt

$$(71)\qquad \bar{s}_m = \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT}}{p^{n-m+1} y^m} \frac{1 - \dfrac{y^m}{p^m}}{p - y} \mathsf{B}_0(p, y)\, dp\, dy$$

$$(s + 1 \leqq m \leqq n).$$

Dadurch ist die Berechnung von $\bar{s}_m$ und damit zugleich die des Gesprächsverlustes v auf die erzeugende Funktion $\mathsf{B}_0(p, y)$ zurückgeführt, zu deren Bestimmung wir auf die Rekursionsformel (67) zurückgreifen. Übt man auf (67) die Operation $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dots y^\nu$ aus (mit hinreichend kleinem y

und vertauscht auf der rechten Seite die Reihenfolge der Summationen nach ν und σ $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} y^{\nu} \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \ldots = \sum_{\sigma=0}^{\infty} y^{\sigma+1} \sum_{\nu=\sigma+1}^{\infty} \ldots y^{\nu-\sigma-1}\right)$, so folgt mit (68)

$$(72) \qquad \mathsf{B}_k(p_1, \ldots, p_k; p, y) - b_{1,0}^{(k)}$$

$$= y\varphi(\xi) \sum_{\lambda=0}^{k}{}' \sum_{\varepsilon=\lambda}^{k} \sum_{1', \ldots, \varepsilon'} \frac{(-1)^{\varepsilon+\lambda}}{p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - \xi - y} \sum_{1'', \ldots, \lambda''} (\mathsf{B}_{\lambda}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}; p, y) - \mathsf{B}_{\lambda+1}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}, \xi; p, y))$$

$$\left(k = 0, 1, \ldots, s-1; \mathsf{B}_s \equiv 0; \Re\left(p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - \xi - y\right) > 0\right)$$

mit s Konstanten $b_{1,0}^{(0)}, \ldots, b_{1.0}^{(s-1)}$, denen im hier betrachteten Falle die Werte (66c) zukommen.

Die s erzeugenden Funktionen (68) genügen demnach einem (inhomogenen) System von s linearen Integralgleichungen, durch welches, wie sich sogleich zeigt, sie alle, insbesondere das nach (71) zur Lösung unserer Aufgabe allein erforderliche $\mathsf{B}_0(p, y)$, eindeutig bestimmt sind. Als nächstes sei in (72) die Reihenfolge der Summationen nach λ und ε vertauscht:

$$(72\,\mathrm{a}) \qquad \mathsf{B}_k(p_1, \ldots, p_k; p, y) - b_{1,0}^{(k)}$$

$$= y\varphi(\xi) \sum_{\varepsilon=0}^{k}{}' \sum_{1', \ldots, \varepsilon'} \frac{(-1)^{\varepsilon}}{p - \sum_{1'}^{\varepsilon'} p_i - \xi - y} \sum_{\lambda=0}^{\varepsilon} \sum_{1'', \ldots, \lambda''} (-1)^{\lambda} (\mathsf{B}_{\lambda}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}; p, y) - \mathsf{B}_{\lambda+1}(p_{1''}, \ldots, p_{\lambda''}, \xi; p, y))$$

$$(k = 0, 1, \ldots, s-1; \mathsf{B}_s \equiv 0);$$

hierin ist $\sum_{1', \ldots, \varepsilon'}$ die Summe über alle $\binom{k}{\varepsilon}$ Kombinationen $1', \ldots, \varepsilon'$ zu ε Elementen aus der Reihe der Zahlen $1, \ldots, k$, und $\sum_{1'', \ldots, \lambda''}$ geht über alle $\binom{\varepsilon}{\lambda}$ Kombinationen $1'', \ldots, \lambda''$ zu λ Elementen, die aus jedem System $1' \ldots \varepsilon'$ gebildet werden können.

Wir führen nun, um (72a) in ein übersichtlicheres System überzuführen, die Funktionen

$$(73) \qquad \Phi_{\varrho}(p_1, \ldots, p_{\varrho}; p, y) = \sum_{k=0}^{\varrho}{}' \sum_{1', \ldots, k'} (-1)^{k-1} (\mathsf{B}_k(p_{1'}, \ldots, p_{k'}; p, y) - b_{1.0}^{(k)})$$

$$(\varrho = 0, 1, \ldots, s-1)$$

ein, in denen $\sum_{1', \ldots, k'}$ über alle $\binom{\varrho}{k}$ Kombinationen zu k Elementen aus der Reihe $1, \ldots, \varrho$ geht, und setzen auf der rechten Seite Gleichung (72a) ein; dadurch erhält man, da

$$\sum_{k=0}^{\varrho}{}' \sum_{1 \ldots k} (-1)^k \sum_{\varepsilon=0}^{k}{}' \sum_{1', \ldots, \varepsilon'} (-1)^{\varepsilon} F_{\varepsilon}(1', \ldots, \varepsilon')$$

$$= \sum_{\varepsilon=0}^{\varrho}{}' \sum_{1' \ldots \varepsilon'} F_{\varepsilon}(1', \ldots, \varepsilon') \sum_{k=\varepsilon}^{\varrho}{}' (-1)^{k-\varepsilon} \binom{\varrho-\varepsilon}{k-\varepsilon} = F_{\varrho}(1, \ldots, \varrho)$$

ist,

(74)
$$\Phi_\varrho(p_1, \ldots, p_\varrho; p, y)$$
$$= y\varphi(\xi)\frac{1}{p-\sum_1^\varrho p_i-\xi-y}\sum_{\lambda=0}^{\varrho}\sum_{1'\ldots\lambda'}(-1)^{\lambda-1}(\mathsf{B}_\lambda(p_{1'}\ldots p_{\lambda'}; p, y)$$
$$-\mathsf{B}_{\lambda+1}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}, \xi; p, y)) \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Nach (73) ist aber die Doppelsumme $\sum_{\lambda=0}^{\varrho}\sum_{1'\ldots\lambda'}$ in (74), solange $0 \leqq \varrho < s-1$ ist, gleich $\Phi_{\varrho+1}(p_1 \ldots p_\varrho, \xi; p, y) + \sum_{k=0}^{\varrho+1}(-1)^{k-1}\binom{\varrho+1}{k} b_{1,0}^{(k)}$, so daß sich ergibt

(75)
$$\Phi_\varrho(p_1, \ldots, p_\varrho; p, y) = y\varphi(\xi)\frac{\Phi_{\varrho+1}(p_1, \ldots, p_\varrho, \xi; p, y)+\sum_{k=0}^{\varrho+1}(-1)^{k-1}\binom{\varrho+1}{k} b_{1,0}^{(k)}}{p-\sum_1^\varrho p_i-\xi-y}$$
$$(\varrho = 0, 1, \ldots, s-2)$$

Weiter folgt aus (73) $\left(\text{mit } \sum_{1', \ldots, \nu'} \text{ als Summe über alle } \binom{s}{\nu} \text{ Kombinationen zu } \nu \text{ Elementen aus der Reihe } 1, \ldots, s\right)$

$$\sum_{\nu=0}^{s-1}\sum_{1', \ldots, \nu'}(-1)^{s-1-\nu}\Phi_\nu(p_{1'}, \ldots, p_{\nu'}; p, y)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{s-1}\sum_{1'\ldots\nu'}(-1)^{s-1-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{1''\ldots k''}(-1)^{k-1}(\mathsf{B}_k(p_{1''}, \ldots, p_{k''}; p, y) - b_{1,0}^{(k)})$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^s\sum_{1''\ldots k''}(\mathsf{B}_k(p_{1''}, \ldots, p_{k''}; p, y) - b_{1,0}^{(k)})\sum_{\nu=k}^{s-1}(-1)^{\nu-k}\binom{s-k}{\nu-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1}\sum_{1''\ldots k''}(-1)^{k-1}(\mathsf{B}_k(p_{1''}, \ldots, p_{k''}; p, y) - b_{1,0}^{(k)})$$

oder

(76)
$$\sum_{\nu=0}^{s-1}\sum_{1'\ldots\nu'}(-1)^{s-1-\nu}\Phi_\nu(p_{1'}, \ldots, p_{\nu'}; p, y) + \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{k-1}\binom{s}{k} b_{1,0}^{(k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1}\sum_{1''\ldots k''}(-1)^{k-1}\mathsf{B}_k(p_{1''}, \ldots, p_{k''}; p, y).$$

Nimmt man hier für $p_{1'}, \ldots, p_{s'}$ das System $p_1, \ldots, p_{s-1}, \xi$, so wird die rechte Seite gleich dem Werte der Doppelsumme $\sum_{\lambda=0}^{\varrho}\sum_{1'\ldots\lambda'}$ in (74) für $\varrho = s-1$, so daß man durch Einsetzen in (74) erhält

$$\Phi_{s-1}(p_1, \ldots, p_{s-1}; p, y)$$
$$= y\varphi(\xi)\frac{1}{p-\sum_1^{s-1} p_i-\xi-y}\left[\sum_{\nu=0}^{s-1}\sum_{1', \ldots, \lambda'}(-1)^{s-1-\nu}\Phi_\nu(p_{1'}, \ldots, p_{\nu'}; p, y)+\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{k-1}\binom{s}{k} b_{1,0}^{(k)}\right].$$
$$(\{p_{1'}, \ldots, p_{s'}\} = \{p_1, \ldots, p_{s-1}, \xi\})$$

Es handelt sich nun darum, das linear-inhomogene System der s Integralgleichungen (75), (77), dem die s Funktionen $\Phi_0, \ldots, \Phi_{s-1}$ genügen, aufzulösen. Zur Bestimmung von $\mathbf{s}_m$ wird nur $\Phi_0(p, y)$ benötigt, da (Gleichung (73) für $\varrho = 0$ und Gleichung (66c))

$$\Phi_0(p, y) = 1 - \mathsf{B}_0(p, y) \tag{77a}$$

und daher (Gleichung (71))

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{s}}}_m &= \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT}}{p^{n+1}} \frac{\frac{p^m}{y^m} - 1}{p - y} (1 - \Phi_0(p, y))\, dp\, dy \\ &= 1 - \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT}}{p^{n+1}} \frac{\frac{p^m}{y^m} - 1}{p - y} \Phi_0(p, y)\, dp\, dy \qquad (1 \leqq m \leqq n) \end{aligned} \tag{78}$$

ist.

Für die speziellen Werte (66c) der Konstanten $b_{1,0}^{(k)}$ verschwinden alle Summen $\sum_{k=0}^{\varrho+1}$ in (75), woraus folgt, daß $\Phi_0(p, y)$ an der Stelle $y = 0$ so wie y^s verschwindet; daher verschwindet auch das letzte $\int_{K_y} \ldots dy$ für $1 \leqq m \leqq s$, wodurch die rechte Seite von (78) $= 1$ wird im Einklang mit (7), so daß die zunächst nur für $s + 1 \leqq m \leqq n$ abgeleitete Gleichung (78) auch für $1 \leqq m \leqq n$ gilt. Mit (30) und

$$\frac{1}{p - y} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{p^m}{y^m} - 1 \right) = \frac{1}{p - y} \left[\frac{p}{n} \frac{p^n - y^n}{y^n (p - y)} - 1 \right] \tag{78a}$$

folgt daher weiter

$$\boxed{v = \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT} \Phi_0(p, y)}{p^{n+1}(p - y)} \left[\frac{p}{n} \frac{p^n - y^n}{y^n (p - y)} - 1 \right] dp\, dy \qquad (s \geqq 1)}, \tag{79}$$

so daß die Bestimmung des Gesprächsverlustes auf die Auflösung des Systems der Integralgleichungen (75), (77) für die Werte (66c) von $b_{1,0}^{(k)}$ zurückgeführt ist.

§ 8.

Formale Lösung verschiedener Wahrscheinlichkeitsaufgaben.

Ehe wir zur letzteren Aufgabe übergehen, soll gezeigt werden, daß mit Hilfe einer Verallgemeinerung von $\Phi_0(p, y)$ auch einige allgemeinere sich für unser Schema ergebende Fragestellungen zu beantworten sind.

Es sei

$$w_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, s) \tag{80}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgendeine der n Personen bei ihrem Eintreffen mindestens a Schalter besetzt findet; speziell ist w_s ersichtlich gleich dem Gesprächsverlust:

(80a) $$w_s = \bar{\bar{v}}.$$

Setzt man analog (3)

(81) $$\mathfrak{s}_{m,a}(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_{m-1}) = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem beim Eintreffen der m-ten Person höchstens $a-1$ oder mindestens a Schalter besetzt sind, und bedenkt man, daß der erstere Fall dann und nur dann eintritt, wenn unter den $m-1$ Zeitdifferenzen

(81a) $$x_m - x_\nu - \mathfrak{s}_\nu t_\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq m-1)$$

höchstens $a-1$ negative Zahlen vorkommen, so folgt

(82) $$\mathfrak{s}_{m,a} = \mathfrak{s}\,\mathrm{Min}^{(a)}(x_m - x_\nu - \mathfrak{s}_\nu t_\nu;\ 1 \leqq \nu \leqq m-1)$$
$$(a+1 \leqq m \leqq n;\ a = 1, 2, \ldots, s),$$

während für die ersten s Personen eo ipso

(83) $$\mathfrak{s}_{m,a} = 1 \qquad (1 \leqq m \leqq a)$$

gilt; insbesondere wird, gemäß (7) und (31)

$$\mathfrak{s}_{m,s} = \mathfrak{s}_m \qquad (1 \leqq m \leqq n).$$

Analog dem Erwartungswert $\bar{\mathfrak{s}}_m$ Gleichung (29) von $\mathfrak{s}_m$ bezeichne $\bar{\mathfrak{s}}_{m,a}$ den Erwartungswert von $\mathfrak{s}_{m,a}$; dann gilt analog (30)

(84) $$w_a = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(1 - \bar{\mathfrak{s}}_{m,a}) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{\mathfrak{s}}_{m,a} \qquad (a = 1, 2, \ldots, s).$$

Gemäß (82), (20), (33), (36a), (24) wird sodann

(85) $$\mathfrak{s}_{m,a}\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\left[\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}S_{m-1,a}P_{m-1}\,dp_1 \ldots dp_{m-1}\right]dp$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\left[\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}}\tilde{S}^{(k)}_{m-1}P_{m-1}\,dp_1 \ldots dp_{m-1}\right]dp$$
$$(a = 1, 2, \ldots, s),$$

eine Formel, deren Spezialfall $a = s$ bereits früher in (57b) abgeleitet wurde. Da (85) von der Gestalt (56), (57) ist mit $\nu = 1$ und

(86) $$b^{(k)}_{1,0}(p_1, \ldots, p_k)\begin{cases} = 1 & (1 \leqq k \leqq a-1), \\ = 0 & (a \leqq k \leqq s), \end{cases}$$

wird $\bar{\mathfrak{s}}_{m,a}$ aus (85) in gleicher Weise wie früher $\mathfrak{s}_m$ (Gleichung (78)) aus (57b) durch formale Ausführung der einzelnen reellen Integrationen er-

halten:

$$(87)\qquad s_{m,a}=1-\frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_y}\frac{e^{pT}}{p^{n+1}}\frac{\frac{p^m}{y^m}-1}{p-y}\,\Phi_{0,a}(p,y)\,dp\,dy$$
$$(a+1\leqq m\leqq n).$$

Hierbei ist $\Phi_{0,a}$ bestimmt durch das für die Werte (86) der $b_{1,0}^{(k)}$ aus (75), (77) hervorgehende System:

$$(88)\qquad \Phi_{\varrho,a}(p_1,\ldots,p_\varrho;\,p,y)=y\varphi(\xi)\frac{\Phi_{\varrho+1}(p_1,\ldots,p_\varrho,\xi;\,p,y)+(-1)^a\binom{\varrho}{a-1}}{p-\sum_1^\varrho p_i-\xi-y}$$
$$(\varrho=0,1,\ldots,s-2),$$
$$\Phi_{s-1,a}(p_1,\ldots,p_{s-1};\,p,y)$$
$$=y\varphi(\xi)\frac{1}{p-\sum_1^{s-1}p_i-\xi-y}\left[\sum_{\nu=0}^{s-1}\sum_{1',\ldots,\nu'}(-1)^{s-1-\nu}\Phi_{\nu,a}(p_{1'},\ldots,p_{\nu'};\,p,y)+(-1)^a\binom{s-}{a-}\right.$$
$$(\{p_{1'},\ldots,p_{s'}\}=\{p_1,\ldots,p_{s-1},\xi\})\qquad(a=1,2,\ldots$$

Wie früher erkennt man, daß $\Phi_{0,a}$ an der Stelle $y=0$ so wie y^a verschwindet, so daß Gleichung (87) wegen (83) auch für $1\leqq m\leqq a$ richtig bleibt; daher folgt aus (84), (87) schließlich

$$(89)\qquad w_a=\frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_y}\frac{e^{pT}\Phi_{0,a}(p,y)}{p^{n+1}(p-y)}\left[\frac{p}{n}\frac{p^n-y^n}{y^n(p-y)}-1\right]dp\,dy$$
$$(s\geqq 1;\ a=1,2,\ldots,s).$$

Gemäß der Definition von w_a sind

$$(90)\qquad w_1-w_2,\ w_2-w_3,\ \ldots,\ w_{s-1}-w_s,\ w_s$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß irgendeine der n Personen bei ihrem Eintreffen genau einen, zwei, ..., $s-1$, s Schalter besetzt vorfindet.

Eine andere für unser Schema aufzuwerfende Frage ist die nach der Wahrscheinlichkeit $(w_a(t))$ dafür, daß zur Zeit t $(0\leqq t\leqq T)$ mindestens a Schalter besetzt sind. Zur Berechnung gehen wir wieder von dem allgemeinen Falle (1), (27) des Eintreffens von n Personen aus; t falle gerade in das Intervall

$$(91)\qquad x_{m-1}<t<x_m\qquad(1\leqq m\leqq n+1),$$

wobei m eine bestimmte der Zahlen $1,\ldots,n+1$ ist, und $x_0=0$, $x_{n+1}=T$ gesetzt sei. Ist $m\leqq a$, so sind zur Zeit t sicher weniger als a Schalter besetzt; ist aber $m\geqq a+1$, so sind zur Zeit t dann und nur dann min-

destens a Schalter besetzt, wenn unter den $m-1$ Zeitdifferenzen

$$x_\nu + s_\nu t_\nu - t \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

mindestens a nichtnegative Zahlen sind; die Funktion, welche $=1$ oder $=0$ ist, je nachdem zur Zeit t mindestens a oder weniger als a Schalter besetzt sind, lautet daher, wenn in (91) $m \geqq a+1$ ist,

$$(92) \qquad \begin{aligned} &s\,\mathrm{Max}^{(a)}(x_\nu + s_\nu t_\nu - t;\ 1 \leqq \nu \leqq m-1) \\ &= 1 - s\,\mathrm{Min}^{(a)}(t - x_\nu - s_\nu t_\nu;\ 1 \leqq \nu \leqq m-1) \equiv 1 - s_{m,a}(t) \\ &\qquad (a+1 \leqq m \leqq n+1). \end{aligned}$$

Für $s_{m,a}(t)$ gilt nach (20)

$$(93) \qquad s_{m,a}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}} S_{m-1,a} \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (t - x_\nu - s_\nu t_\nu)}}{\prod_1^{m-1} p_\nu}\, dp_1 \ldots dp_{m-1}$$

$$(a+1 \leqq m \leqq n+1).$$

Setzt man weiter

$$(93a) \qquad s_{m,a}(t) = 1 \qquad (1 \leqq m \leqq a)$$

und bezeichnet mit $\bar{s}'_{m,a}(t)$ den Erwartungswert des Produktes

$$(93b) \qquad s'_{m,a}(t) = s_{m,a}(t)\, s(x_m - t)\, s(t - x_{m-1}),$$

so erhält man offensichtlich

$$(94) \qquad w_a(t) = 1 - \sum_{m=1}^{n+1} \bar{s}'_{m,a}(t).$$

Die Ausübung der $n-m$ innersten Integrationen nach den x_ν auf (93b) ergibt

$$s'_{m,a}(t) \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!},$$

und die nun folgende Integration $\int_{x_{m-1}}^{T} .. dx_m$ liefert, mit (93),

$$\int_{x_{m-1}}^{T} s'_{m,a}(t) \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m = \int_{x_{m-1}}^{T} s_{m,a}(t)\, s(x_m - t)\, s(t - x_{m-1}) \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m$$

$$= \int_{t}^{T} s_{m,a}(t)\, s(t - x_{m-1}) \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\, dx_m = \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\, s_{m,a}(t)\, s(t - x_{m-1})$$

$$= \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{C_p} S_{m-1,a} \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (t - x_\nu - s_\nu t_\nu) + p(t - x_{m-1})}}{\prod_1^{m-1} p_\nu \cdot p}\, dp_1 \ldots dp_{m-1}\, dp$$

$$= \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{C_p} S_{m-1,a} \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_\nu (x_{m-1} - x_\nu - s_\nu t_\nu) + p(t - x_{m-1})}}{\prod_1^{m-1} p_\nu \left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu\right)}\, dp_1 \ldots dp_{m-1}\, dp$$

$$\left(\Re\left(p - \sum_1^{m-1} p_\nu\right) > 0\right)$$

oder

$$(95)\qquad \int_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}'_{m,a}(t)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$

$$= \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\,\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{C_p} S_{m-1,a}\,\frac{e^{\sum_1^{m-2} p_\nu(x_{m-1}-x_\nu-s_\nu t_\nu)+p(t-x_{m-1})}}{\prod_1^{m-2} p_\nu}\,\frac{e^{-p_{m-1}s_{m-1}t_{m-1}}}{p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1} p_\nu\right)}\,dp\,dp_1\ldots$$

$$(a+1\leqq m\leqq n+1).$$

Der Vergleich mit dem Übergang von den ähnlichen Formeln (36), (36a) zu (78) und von (85) zu (87) zeigt dann, daß aus (95) folgt

$$(96)\qquad \bar{\mathfrak{s}}'_{m,a}(t) = \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\,\frac{n!}{T^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_y}\frac{e^{pt}}{p^m}\,\frac{\frac{p^m}{y^m}-1}{p-y}\,(1-\Phi_{0,a}(p,y))\,dp\,dy$$

$$= \binom{n}{m-1}\frac{(T-t)^{n-m+1}t^{m-1}}{T^n} - \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_y}\frac{e^{pt}}{p^m}\,\frac{\frac{p^m}{y^m}-1}{p-y}\,\Phi_{0,a}(p,y)\,dp\,dy$$

$$(a+1\leqq m\leqq n+1),$$

eine Formel, die sich, im Einklang mit (93a, b), auch für $1\leqq m\leqq a$ als richtig erweist. Aus (94), (96) wird

$$(97)\qquad w_a(t) = \frac{n!}{T^n}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_y}\frac{e^{pT}}{p^m}\,\frac{\frac{p^m}{y^m}-1}{p-y}\,\Phi_{0,a}(p,y)\,dp\,dy,$$

und wir schreiben hierin, um die letzte Summation ausführen zu können,

$$(97a)\qquad \frac{(T-t)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_q}\frac{e^{q(T-t)}}{q^{n-m+2}}\,dq,$$

erstreckt über eine Parallele C_q rechts von der imaginären Achse.

Dann folgt

$$(98)\qquad w_a(t) = \frac{n!}{T^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_y}\frac{e^{pt+q(T-t)}}{q^{n+2}}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{\frac{q^m}{y^m}-\frac{q^m}{p^m}}{p-y}\,\Phi_{0,a}(p,y)\,dp\,dq\,dy$$

$$= \frac{n!}{T^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_y}\frac{e^{pt+q(T-t)}}{q^{n+1}(p-y)}\left(\frac{\frac{q^{n+1}}{y^{n+1}}-1}{q-y}-\frac{\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}-1}{q-p}\right)\Phi_{0,a}(p,y)\,dp\,dq$$

$$(0\leqq t\leqq T).$$

Mit Hilfe von Gleichung (98) kann nunmehr eine weitere, in den früheren Bearbeitungen dieses Themas im Vordergrund stehende Größe

bestimmt werden, nämlich der Erwartungswert W_a desjenigen Bruchteils des Intervalls

$$0 \leqq t \leqq T, \tag{99}$$

innerhalb dessen mindestens a Schalter besetzt sind. Nach Früherem ist

$$1 - \sum_{m=1}^{n+1} s'_{m,a}(t) \equiv 1 - \sum_{m=1}^{n+1} s'_{m,a}(t; x_1, \ldots, x_{m-1}; t_1, \ldots, t_{m-1}) = 1 \text{ oder } = 0, \tag{100}$$

je nachdem zur Zeit t mindestens a oder weniger als a Schalter besetzt sind. Um daher den fraglichen Bruchteil des Intervalls (99) zu erhalten, hat man auf (100) die Operation $\frac{1}{T}\int_0^T \ldots dt$ auszuüben, und der Erwartungswert dieses Bruchteils ergibt sich daraus durch Ausübung der weiteren Operation $\frac{n!}{T^n} \int_{t'}^{t''} df(t_1) \ldots \int_{t'}^{t''} df(t_n) \int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{n-1}}^{T} \ldots dx_n$. Da beide Operationen vertauschbar sind, erhält man W_a auch durch Ausübung von $\frac{1}{T}\int_0^T \ldots dt$ auf den Erwartungswert $w_a(t)$ (Gleichung (94)) der Funktion (100), also

$$W_a = \frac{1}{T}\int_0^T w_a(t)\, dt \qquad (a = 1, 2, \ldots, s), \tag{101}$$

und hieraus folgt, da in (98) nach t unter den Integralzeichen integriert werden darf,

$$= \frac{n!}{T^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_y} \frac{e^{pT} - e^{qT}}{q^{n+1}(p-q)(p-y)} \left(\frac{\frac{q^{n+1}}{y^{n+1}} - 1}{q-y} - \frac{\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - 1}{q-p} \right) \Phi_{0,a}(p, y)\, dp\, dq\, dy.$$

Setzt man nun über die Lage von C_q weiter fest, daß C_q links von C_p liege, also $\Re(p-q) > 0$ für alle p auf C_p und alle q auf C_q, so verschwindet hier $\int_{C_q} \ldots dq$ über den Anteil von e^{qT} (Verschiebung von C_q nach links!), während das Integral $\int_{C_q} \ldots dq$ über den Anteil von e^{pT} durch Verschiebung von C_q nach rechts sich als gleich dem Residuum im Pole erster Ordnung $q = p$ erweist.

Daher wird weiter

$$W_a = \frac{n!}{T^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p}\int_{K_y} \frac{e^{pT}}{p^{n+1}(p-y)} \Phi_{0,a}(p, y) \left(\frac{\frac{p^{n+1}}{y^{n+1}} - 1}{p-y} - \frac{n+1}{p} \right) dp\, dy$$

oder

$$(102)\qquad \boxed{W_a = \frac{(n+1)!}{T^{n+1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT}\Phi_{0,a}(p,y)}{p^{n+2}(p-y)} \left(\frac{p}{n+1} \frac{p^{n+1} - y^{n+1}}{y^{n+1}(p-y)} - 1 \right) dp\, dy} \quad .$$

$$(a = 1, 2, \ldots, s)$$

Analog (90) sind

$$(103)\qquad w_1(t) - w_2(t),\ w_2(t) - w_3(t),\ \ldots,\ w_s(t)$$

bzw.

$$(104)\qquad W_1 - W_2,\ W_2 - W_3,\ \ldots,\ W_s$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß zur Zeit t genau $1, 2, \ldots, s$ Schalter besetzt sind, bzw. die Erwartungswerte derjenigen Bruchteile des Intervalls (99), innerhalb deren $1, 2, \ldots, s$ Schalter besetzt sind.

§ 9.

Untersuchung des Integralgleichungssystems (88).

Wir gehen jetzt an die Untersuchung des Systems der Integralgleichungen (88). Es sei zuerst $s = 1$ (und daher auch $a = 1$) genommen; in diesem einfachsten Falle, der natürlich auch einer direkten einfacheren Behandlung zugänglich ist, folgt aus der zweiten Gleichung (88)

$$\Phi_0(p,y) = y\,\varphi(\xi)\frac{1}{p-\xi-y}(\Phi_0(p,y) - 1),$$

d. i., mit (44),

$$(105)\qquad \Phi_0(p,y) = y\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-\xi-y)}(\Phi_0(p,y) - 1)\,d\xi$$

$$(\Re(p-\xi-y) > 0).$$

Durch Verschiebung von C nach $\Re(\xi) = \infty$ ergibt sich hieraus

$$\Phi_0(p,y) = y\,\frac{\varepsilon(y-p)-1}{p-y}(\Phi_0(p,y) - 1)$$

oder

$$(106)\qquad \Phi_0(p,y) = y\,\frac{1-\varepsilon(y-p)}{p-y\,\varepsilon(y-p)} \qquad \left(s = 1;\ \varepsilon(z) = \int_{t'-0}^{t''+0} e^{zt}\,df(t)\right).$$

Der letzte Bruch ist ersichtlich in eine — für alle p mit $\Re(p) \geqq c > 0$ in einem Kreise $|y| < \varrho(c)$ gleichmäßig konvergierende — Potenzreihe nach y entwickelbar; für $s = 1$ ist dadurch die bei der Herleitung von (88) benutzte Annahme der Konvergenz der erzeugenden Potenzreihe (68) gerechtfertigt.

Daß die Lösungen von (88) auch für $s>1$ in der Umgebung von $y=0$ analytisch sind, zeigen wir an dem Beispiel $s=2$, $a=2$. Für diese Werte ergibt (88) (u, Φ_0, $\Phi_1(u)$ statt p_1, $\Phi_{0,2}(p,y)$, $\Phi_{1,2}(p_1;p,y)$ geschrieben)

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\quad & \Phi_0 = y\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-\xi-y)}\Phi_1(\xi)\,d\xi \qquad (\Re(p-\xi-y)>0) \\ \text{b)}\quad & \Phi_1(u) = y\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-u-\xi-y)}(\Phi_1(\xi)+\Phi_1(u)-\Phi_0+1)\,d\xi \\ & \qquad\qquad (\Re(p-u-\xi-y)>0) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} s=2, \\ a=2. \end{matrix}$$

Aus (107b) folgt durch das eben auf (105) angewandte Verfahren

$$\Phi_1(u) = y\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-u-\xi-y)}\Phi_1(\xi)\,d\xi + y\frac{\varepsilon(u+y-p)-1}{p-u-y}(\Phi_1(u)-\Phi_0+1);$$

wird hierin für Φ_0 der Ausdruck (107a) eingesetzt und elementar umgeordnet, so erhält man für $\Phi_1(u)$ eine Beziehung von der Gestalt

$$\Phi_1(u) = y\frac{1}{2\pi i}\int_C K(u,\xi;y)\,\Phi_1(\xi)\,d\xi + f(u;y), \tag{108}$$

also eine lineare Integralgleichung, deren Kern K und vorgegebene Funktion f noch von dem Parameter y (der dem λ der üblichen Schreibweise entspricht) abhängen. Die Existenz einer an der Stelle $y=0$ regulären Lösung von (108) ist dadurch zu erweisen, daß man die Konvergenz der zugehörigen Neumannschen Reihe für hinreichend kleines $|y|$ zeigt. Wir führen jedoch das betreffende Iterationsverfahren direkt an dem System (107a), (107b) durch und benutzen dabei die elementar zu beweisende Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-\xi)}\right|\,|d\xi| < \frac{4}{\pi\sqrt{ab}} = k(a,b) \tag{109}$$

$$[\text{für } \Re(\xi)=a(>0),\quad \Re(p-\xi)\geqq b(>0)].$$

Wählt man in (107a), (107b), unter α, β zwei positive Zahlen verstanden,

$$\Re(u)=\alpha,\qquad \Re(p)>2\alpha+\beta,\qquad \Re(\xi)=\alpha,$$

so gilt für hinreichend kleines $|y|$ auch

$$\Re(p-\xi-y)>\alpha+\beta>0,\qquad \Re(p-u-\xi-y)>\beta>0,$$

so daß aus der Ungleichung (109) folgt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-u-\xi-y)}\right|\,|d\xi| < k(\alpha,\beta), \\ &\frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi(p-\xi-y)}\right|\,|d\xi| < k(\alpha,\alpha+\beta) < k(\alpha,\beta). \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Wendet man nun auf (107a), (107b) das Verfahren der sukzessiven Approximationen $\left(\Phi_0^{(0)} = \Phi_1^{(0)}(u) = 0;\ \Phi_0^{(\nu+1)} = y\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi-1)}{\xi(p-\xi-y)}\,\Phi_1^{(\nu)}(\xi)\,d\xi,\right.$ $\left.\Phi_1^{(\nu+1)}(u) = \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots\right)$ an und schätzt die einzelnen $\Phi_0^{(\nu)}$ und $\Phi_1^{(\nu)}(u)$ mittels (110) ab, so erkennt man, daß die $\Phi_0^{(\nu)}$, $\Phi_1^{(\nu)}(u)$ bzw. die formalen Lösungen $\Phi_0^{(\infty)}$, $\Phi_1^{(\infty)}(u)$ Majoranten in den ν-ten Approximationen bzw. in den formal nach $|y|$ entwickelten Lösungen φ_0, φ_1 des Gleichungssystems

$$\varphi_0 = |y|\,k\,\varphi_1, \qquad \varphi_1 = |y|\,k\,(2\varphi_1 + \varphi_0 + 1) \qquad (k = k(\alpha, \beta)) \tag{111}$$

besitzen. Aus (111) folgt

$$\varphi_0 = \frac{|y|^2 k^2}{1 - 2|y|k - |y|^2 k^2}, \qquad \varphi_1 = \frac{|y|k}{1 - 2|y|k - |y|^2 k^2}, \tag{111a}$$

und da die formalen Reihenentwicklungen dieser Ausdrücke für hinreichend kleines $|y|$ konvergieren, folgt in bekannter Weise, daß das Verfahren der sukzessiven Approximationen konvergiert und in $\Phi_0^{(\infty)} = \Phi_0$, $\Phi_1^{(\infty)}(u) = \Phi_1(u)$ für $|y| < \varrho(\Re(p), \Re(u))$ in y analytische Lösungen liefert.

Weiter bestätigt man leicht, daß (für beliebiges $c > 0$) $\Phi_0(p, y)$ im Gebiete $\Re(p) > c > 0$, $|y| < \varrho(c)$ analytisch in p und y ist, sowie daß $\Phi_1(u; p, y)$ im Gebiete $\Re(p) > c > 0$, $\Re(p-u) > c$, $|y| < \varrho(c)$ analytisch in u, p und y und in diesem Gebiete bei festem p und y gleichmäßig beschränkt in bezug auf u ist.

Der Beweis für $s > 2$ (a beliebig) verläuft ganz analog, so daß die Existenz usw. der $\Phi_{\nu,a}$ (innerhalb entsprechender Gebiete) und die daraus folgende, früher ohne Beweis angenommene der B_k (Gleichung (68)) für beliebiges s und $f(t)$ sichergestellt ist.

Setzt man weiter im Falle $t'' = \infty$, so wie früher im formalen Teil (s. Anm. 2), voraus:

$$\varepsilon(-z) = \int_{t'=0}^{\infty} e^{-zt}\,df(t) \text{ konvergiert auch für } c < \Re(z) \leqq 0, \tag{112}$$

(c eine geeignete negative Konstante),

so gilt eine Ungleichung analog (109) auch für $\Re(\xi) = c < 0$, womit auf dem früheren Wege auch die Existenz usw. von $\Phi_0(p+y, y)$ bzw. $\Phi(u; p+y, y)$ in einem Gebiete $\Re(p) > c$, $|y| < \varrho(c)$ bzw. $\Re(p) > c$, $\Re(p-u) > c$, $|y| < \varrho(c)$ nachweisbar ist. Insbesondere existiert also für hinreichend kleines $|y|$ die Funktion $\Phi_0(y, y)$, die, wie später gezeigt wird, für alle $\varepsilon(z)$, d. i. für alle $f(t)$, den gleichen Wert hat.

Diese Existenzsätze ermöglichen es, die Integralgleichungen (88) für gewisse Klassen von Funktionen $\varepsilon(z)$ auf einfachere Gestalt zu bringen und ihre Lösungen in geschlossener Form anzugeben. Wir schicken ein

Beispiel voran; als Verteilungsfunktion sei angenommen die Funktion

$$f(t) = 1 - e^{-t}, \quad 0 \leqq t \leqq \infty, \tag{112a}$$

die mit t monoton zunimmt und den Bedingungen (26a) genügt. Mit (38), (44) folgt

$$\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt-t}\,dt = \frac{1}{1-z}, \qquad \eta(z)\,F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z+1}\,dz, \tag{112b}$$

und hiermit wird aus (88)

$$\Phi_{\varrho,a}(p_1, \ldots, p_\varrho; p, y) = -\frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi_{\varrho+1,a}(p_1, \ldots, p_\varrho, \xi; p, y) + (-1)^a \binom{\varrho}{a-1}}{\left(p - \sum_1^\varrho p_i - \xi - y\right)(\xi+1)}\,d\xi$$
$$(\varrho = 0, 1, \ldots, s-2),$$

$$\Phi_{s-1,a}(p_1, \ldots, p_{s-1}; p, y) = -\frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\nu} \sum_{1', \ldots, \nu'} \Phi_{\nu,a}(p_{1'}, \ldots, p_{\nu'}; p, y) + (-1)^a \binom{s-1}{a-1}}{\left(p - \sum_1^{s-1} p_i - \xi - y\right)(\xi+1)}\,d\xi, \tag{113}$$
$$\{p_{1'}, \ldots, p_{s'}\} = \{p_1, \ldots, p_{s-1}, \xi\}$$

$$\left(\Re\left(p - \sum_1^\varrho p_i - \xi - y\right) > 0; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, s-1\right).$$

Da, in Verallgemeinerung des früher für $s = 2$ Ausgeführten, alle $\Phi_{\varrho,a}$ bei festem p und (hinreichend kleinem) y im Gebiete

$$\Re\left(p - \sum_1^\varrho p_i - y\right) > c > 0$$

analytisch und gleichmäßig beschränkt sind, darf man die Integrationskurve C nach $\Re(\xi) = -\infty$ verschieben, wodurch sämtliche Integrale sich als gleich den Residuen in $\xi = -1$ ergeben. Setzt man sodann noch $p_1 = p_2 = \ldots = p_{s-1} = -1$, so folgt

$$\Phi_{\varrho,a}(-1, \ldots, -1; p, y) = \frac{-y}{p+\varrho+1-y}\left(\Phi_{\varrho+1,a}(-1, \ldots, -1; p, y) + (-1)^a \binom{\varrho}{a-1}\right)$$
$$(\varrho = 0, 1, \ldots, s-2),$$

$$\Phi_{s-1,a}(-1, \ldots, -1; p, y) = \frac{-y}{p+s-y}\left(\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\nu}\binom{s}{\nu}\Phi_{\nu,a}(-1, \ldots, -1; p, y) + (-1)^a \binom{s-1}{a-1}\right) \tag{114}$$
$$(a = 1, 2, \ldots, s).$$

Aus diesem System von s in den Unbekannten $\Phi_{\varrho,a}(-1,\ldots,-1;p,y$ linearen Gleichungen folgt insbesondere

$$\Phi_{0,a}(p,y)=\frac{\sum_{\mu=0}^{s-a} y^{s-\mu}\sum_{\lambda=a}^{s-\mu}(-1)^{\lambda-a}\binom{\lambda}{a-1}\binom{s}{\mu+\lambda}\prod_{k=\lambda+1}^{\lambda+\mu}(p-y+k)}{\sum_{\nu=0}^{s}\binom{s}{\nu}y^{s-\nu}\prod_{k=1}^{\nu}(p-y+k)} \tag{115}$$

$$(a=1,2,\ldots,s);$$

für den Fall der Verteilungsfunktion (112a) sind dadurch nach (79), (89), (102) alle unsere Aufgaben auf die Auswertung von komplexen Doppelintegralen über elementare Funktionen zurückgeführt. Für später merken wir an, daß aus (115) folgt

$$\Phi_{0,a}(y,y)=\frac{\sum_{\nu=a}^{s}\frac{y^\nu}{\nu!}}{\sum_{\nu=0}^{s}\frac{y^\nu}{\nu!}} \qquad (a=1,2,\ldots,s). \tag{116}$$

Gleich dem $f(t)$ unseres Beispiels führt offensichtlich jede Verteilungsfunktion von der Form

$$f(t)=\Re\left(C+\sum_{i,k=0}^{N}\alpha_{ik}t^i e^{-\beta_k t}\right) \qquad (\Re(\beta_k)>0;\ 0\leqq t\leqq\infty) \tag{117}$$

auf eine Laplacetransformierte $\varepsilon(z)$, die rational ist, vom Gesamtgrade $\leqq -1$, mit reellen Koeffizienten und Polen von positivem Realteil. Daß umgekehrt jedes derartige rationale $\varepsilon(z)$ durch ein $f(t)$ von der Form (117) erzeugt wird, ergibt das Fouriertheorem, mittels dessen für derartige $\varepsilon(z)$ aus (38) folgt

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varepsilon(-z)\,e^{zt}\,dz \tag{118}$$

$$(0\leqq t\leqq\infty;\ \int_C \text{ als Cauchyscher Hauptwert}).$$

Für alle rationalen $\varepsilon(z)$ vom Gesamtgrade $\leqq -1$ sind nun die $\Phi_{\varrho,a}$ von (88) ebenfalls rationale Funktionen ihrer resp. Argumente. Wir zeigen dies wieder an dem Falle $s=2$, $a=2$. Der Einfachheit halber seien die Pole von $\varepsilon(z)$ als einfach und im Hinblick auf das früher Ausgeführte als von positivem Realteil angenommen; dann gilt

$$\frac{\varepsilon(-z)-1}{z}=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{A_\nu}{z-a_\nu} \qquad (a_\nu\neq a_{\nu'} \text{ für } \nu\neq\nu';\ \Re(a_\nu)<0).$$

Dies sei in (107a), (107b) eingesetzt; verschiebt man dann wieder C nach $\Re(\xi)=-\infty$ hin, so reduzieren sich die Integrale, analog wie im letzten

Beispiel, auf die Residuen in den Polen a_ν, und man erhält

$$\Phi_0 = y \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu \Phi_1(a_\nu)}{p - a_\nu - y}; \qquad \Phi_1(u) = y \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_\nu}{p - u - a_\nu - y} (\Phi_1(u) + \Phi_1(a_\nu) - \Phi_0 + 1).$$

Setzt man in der letzten Gleichung $u = a_1, \ldots, a_m$, so ergeben sich $m+2$ lineare Gleichungen für Φ_0, $\Phi_1(u)$, $\Phi_1(a_1)$, $\ldots$, $\Phi_1(a_m)$, deren Koeffizientendeterminante nicht identisch verschwindet, da sie für $|y| \to 0$ offensichtlich gegen 1 geht. Φ_0 und $\Phi_1(u)$, deren Existenz für hinreichend kleines $|y|$ ja von vornherein sichergestellt ist, sind daher rationale Funktionen ihrer resp. Argumente und können auf die angegebene Weise berechnet werden; dieser Beweisgang ist ersichtlich unmittelbar auf $s > 2$ und den Fall des Vorhandenseins von Polen höherer Ordnung (die Funktionalgleichungen sind dann, bevor in ihnen $p_i = a_\nu$ gesetzt sind, noch mehrfach nach den p_i zu differentiieren) anwendbar; daher ergibt sich, daß für alle Verteilungsfunktionen von der Form (117), die ja nach dem Früheren auf rationales $\varepsilon(z)$ führen, auch $\Phi_0(p, y)$ eine rationale Funktion seiner Argumente p und y ist.

Für alle diese $f(t)$ sind daher alle unsere Aufgaben gemäß (78), (89), (102) auf die Berechnung von Doppelintegralen $\int_{C_p} \int_{K_y}$ über elementare Funktionen von p und y zurückgeführt.

Ein Beispiel einer nicht unter (117) fallenden Verteilungsfunktion wird am Schlusse dieser Arbeit behandelt.

Um zu den asymptotischen Entwicklungen der eben erwähnten Formeln überzuleiten, zeigen wir jetzt, daß die nach Früherem wegen (112) für hinreichend kleines $|y|$ existierende Funktion $\Phi_0(y, y)$ (bei geeigneter Normierung von $\varepsilon(z)$) in jedem Falle durch (116) gegeben wird. Diese Normierung besteht darin, daß man die Zeiteinheit von vornherein so wählt, daß die mittlere virtuelle Abfertigungszeit gleich 1 wird: $\int_{t'}^{t''} t\, df(t) = 1$; nach (38) ist dann

$$\varepsilon'(0) = 1, \tag{120}$$

so wie für das Beispiel (112a), (112b).

Wir ersetzen nun in (88) p durch $p + y$. Nach Früherem sind die $\Phi_{k,a}(p_1, \ldots, p_k; p + y, y)$ wegen (112) im resp. Gebiete

$$\Re\Big(p - \sum_{1'}^{k'} p_i\Big) > c \qquad (k' = 0, 1, \ldots, k), \qquad |y| < \varrho(c)$$

regulär, also jedenfalls auch für $p = 0$, $\Re(p_k) = c' < 0$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$, $|y| < \varrho(c)$. Wird noch $c' > c$ genommen, so dürfen die Integrationskurven C in (88) nach $\Re(\xi) = c'$ (Kurve C') verlegt werden. Für diese Argumente und, der Kürze halber, $a = s$ gesetzt, wird so aus (88)

$\left(\Phi_k(p_1,\ldots,p_k)\right.$ statt $\Phi_{k,s}(p_1,\ldots,p_k;y,y)$ und $\frac{\varphi(\xi)}{\sum_1^{\varrho} p_i+\xi}$ usw. statt $\varphi(\xi)\,\frac{1}{\sum_1^{\varrho} p_i+\xi}$ usw. geschrieben$\left.\right)$:

$$\text{(121a)}\qquad \Phi_\varrho(p_1,\ldots,p_\varrho)=-\frac{y\varphi(\xi)}{\sum_1^{\varrho} p_i+\xi}\,\Phi_{\varrho+1}(p_1,\ldots,p_\varrho,\xi)$$

$$\left(\varrho=0,1,\ldots,s-1;\quad \varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{s(-\xi)-1}{\xi}\ldots d\xi;\quad \Re(p_i)=c',\quad \Re\left(\sum_1^{\varrho} p_i+\xi\right)<\right.$$

$$\text{(121b)}\qquad \Phi_{s-1}(p_1,\ldots,p_{s-1})=-\frac{y\varphi(\xi)}{\sum_1^{s-1} p_i+\xi}\left[\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\nu}\sum_{1'\ldots\nu'}\Phi_\nu(p_{1'},\ldots,p_{\nu'})+(-\right.$$

$$\{p_{1'},\ldots,p_{s'}\}=\{p_1,\ldots,p_{s-1},$$

Für $\varrho=0,1$ erhält man daraus

$$\text{(122a)}\qquad \Phi_0=-\frac{y\varphi(\xi)}{\xi}\,\Phi_1(\xi),\qquad \text{(122b)}\qquad \Phi_1(p_1)=-\frac{y\varphi(\xi)}{p_1-\xi}\,\Phi_2(p_1,\xi).$$

Wendet man nun auf (122b) die Operation $\frac{-y\varphi(p_1)}{p_1}$ an, so folgt wegen (122a)

$$\Phi_0=-\frac{y\varphi(p_1)}{p_1}\,\Phi_1(p_1)=\frac{y^2\varphi(p_1)\varphi(\xi)}{p_1(p_1+\xi)}\,\Phi_2(p_1,\xi).$$

Vertauscht man hier p_1 und ξ, so ergibt sich, da ja die Φ_ϱ nach Früherem in $p_1,\ldots,p_\varrho$ symmetrisch sind,

$$\Phi_0=\frac{y^2\varphi(p_1)\varphi(\xi)}{\xi(p_1+\xi)}\,\Phi_2(p_1,\xi),$$

und die Addition der beiden letzten Gleichungen gibt

$$\Phi_0=\frac{1}{2}\,\frac{y^2\varphi(p_1)\varphi(\xi)}{p_1+\xi}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{\xi}\right)\Phi_2(p_1,\xi)=\frac{y^2}{2}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\,\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,\Phi_2(p_1,\xi).$$

In gleicher Weise erhält man aus (121a) allgemein

$$\text{(123)}\qquad \Phi_0=\frac{(-y)^\nu}{\nu!}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\ldots\frac{\varphi(p_\nu)}{p_\nu}\,\Phi_\nu(p_1,\ldots,p_\nu)\qquad(\nu=0,1,\ldots,s-1).$$

Wendet man nunmehr in (121b) die Operation $\frac{(-y)^{s-1}}{(s-1)!}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\ldots\frac{\varphi(p_{s-1})}{p_{s-1}}$ an, so kann man, da der Ausdruck $[\ldots]$ symmetrisch in $p_1,\ldots,p_{s-1},\xi$ ist, für den darauf anzuwendenden Operator setzen

$$\frac{\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_{s-1})\varphi(\xi)}{p_1\ldots p_{s-1}\left(\sum_1^{s-1} p_i+\xi\right)}=\frac{\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_{s-1})\varphi(\xi)}{p_1\ldots p_{s-1}\xi\left(\sum_1^{s-1} p_i+\xi\right)}\,\frac{1}{s}\,(p_1+\ldots+p_{s-1}+\xi)$$
$$=\frac{1}{s}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\ldots\frac{\varphi(\xi)}{\xi}.$$

Derart folgt aus (121b) mit (123)

$$\Phi_0=\sum_{\nu=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\nu}\binom{s}{\nu}\frac{\nu!}{s!}(-y)^{s-\nu}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\ldots\frac{\varphi(p_{s-\nu})}{p_{s-\nu}}\,\Phi_0+\frac{y^s}{s!}\,\frac{\varphi(p_1)}{p_1}\ldots\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,1.$$

Nun ist (Verschiebung nach $\Re(\xi) = +\infty$) wegen (120)

$$\frac{\varphi(\xi)}{\xi} 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\varepsilon(-\xi)-1}{\xi^2} \cdot 1 \cdot d\xi = \varepsilon'(0) = 1, \tag{124}$$

so daß die vorletzte Gleichung gibt

$$\Phi_0 = -\Phi_0 \sum_{\nu=0}^{s-1}{}' \frac{y^{s-\nu}}{(s-\nu)!} + \frac{y^s}{s!}$$

oder

$$\Phi_0 = \Phi_{0,s}(y, y) = \frac{\frac{y^s}{s!}}{\sum_{\nu=0}^{s}{}' \frac{y^\nu}{\nu!}}, \tag{125}$$

was mit dem Falle $a = s$ von (116) übereinstimmt; die Allgemeingültigkeit der letzteren Formel ist nun auch für $a \neq s$ ersichtlich.

§ 10.

Asymptotische Entwicklung der Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$.

Für großes n führt die direkte Ausrechnung der Formeln (79), (89), (102) schon in dem einfachsten Falle (rationales $\Phi_{0,a}(p, y)$) zu unübersichtlichen Ausdrücken; es liegt daher nahe, diese Formeln für $n \to \infty$ asymptotisch zu entwickeln, nachdem man zuvor eine Festsetzung über die Abhängigkeit des Zeitintervalls T von n getroffen hat.

Von Interesse — sowohl für die zugrunde gelegten Wahrscheinlichkeitsaufgaben als auch vom formalen Standpunkt — ist nur der Fall $T = O(n)$. Wir führen daher die als virtueller Ausnutzungsgrad der Schaltergruppe zu bezeichnende Größe

$$\eta = \frac{n \int_{t'}^{t''} t\, df(t)}{s\, T} = \frac{n}{s\, T} \tag{126}$$

(Quotient aus dem Mittelwert der virtuellen Gesamtabfertigungszeit der n Personen und dem s-fachen des Zeitintervalls, innerhalb dessen sie eintreffen) ein und entwickeln w_a und W_a bei konstant gehaltenem $\eta (> 0)$ für $n \to \infty$; alle ähnlichen Fälle, z. B. $T = n c_1 + c_2$, können aus dieser Entwicklung durch formales Umrechnen erhalten werden.

Mit (126) wird aus (89)

$$w_a = \frac{n!(s\eta)^n}{n^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{s\eta p} \Phi_{0,a}(p, y)}{p^{n+1}(p-y)} \cdot \frac{p}{p-n} \cdot \frac{p^n - y^n}{y^n (p-y)} - 1 \; dp\, dy \tag{127}$$

$$(a = 1, 2, \ldots, s).$$

Hierin ist $\Phi_{0,a}(p,y)$ nach Früherem regulär für $\Re(p) > c$, $|y| < \varrho(c)$ (c eine geeignete negative Konstante), und die Integrationskurven (K_y hinreichend klein) liegen gemäß Fig. 1. Wir deformieren nun C_p in einen K_y umgebenden Kreis K_p nebst einer links von der imaginären Achse liegenden Geraden C_p' und erhalten

$$(128)\quad w_a = \frac{n!(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_y}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}\Phi_{0,a}(p,y)}{p^{n+1}(p-y)}\left[\frac{p}{n}\frac{p^n-y^n}{y^n(p-y)}-1\right]dp\,dy$$
$$+\frac{n!(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{K_y}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}\Phi_{0,a}(p,y)}{p^{n+1}(p-y)}\left[\frac{p}{n}\frac{p^n-y^n}{y^n(p-y)}-1\right]dp\,dy$$
$$(K_p \succ K_y).$$

Wir behandeln zunächst das Doppelintegral $\int_{K_p}\int_{K_y}$; da der Integrandenfaktor (78a) für $p=y$ regulär ist, darf der Kreis K_p in $\int_{K_p}\int_{K_y}$ so verkleinert werden, daß $K_p \prec K_y$ wird; nunmehr verschwindet aber $\int_{K_p}$ über den Anteil von $\frac{p}{n}\frac{p^n}{y^n(p-y)}$, so daß man erhält

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_y} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_y}\frac{e^{\frac{np}{s\eta}}\Phi_{0,a}(p,y)}{p^{n+1}(p-y)}\left[-\frac{p}{n(p-y)}-1\right]dp\,dy \quad (K_p \prec K_y).$$

Der letzte Integrand hat, als Funktion von y betrachtet, innerhalb K_y nur einen Pol (zweiter Ordnung) $p=y$; daher wird weiter

$$(128a)\quad \frac{n!(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_y} = \frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{s\eta}-\log\frac{p}{s\eta}\right)}\left[\Phi_{0,a}(p,p) - \frac{p}{n}\frac{\partial\Phi_{0,a}(p,y)}{\partial y}\Big|_{y=p}\right]$$

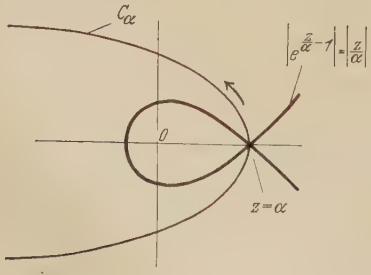


Fig. 3.

Wie derartige Integrale für $n\to\infty$ asymptotisch zu entwickeln sind, ist bekannt; für eine Funktion $F(z)$, die im Innern und auf dem Rande der Schleife der Kurve $\left|\frac{e^{\frac{z}{\alpha}}-1}{\frac{z}{\alpha}}\right| = 1$ (Fig. 3) bis auf Pole z_0 regulär ist, wird

$$(129)\quad \frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_z} e^{n\left(\frac{z}{\alpha}-\log\frac{z}{\alpha}\right)}\frac{F(z)}{z}\,dz$$
$$= \frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\alpha} e^{n\left(\frac{z}{\alpha}-\log\frac{z}{\alpha}\right)}\frac{F(z)}{z}\,dz + \frac{n!}{n^n}\sum_{z_0} e^{n\left(\frac{z_0}{\alpha}-\log\frac{z_0}{\alpha}\right)}\operatorname{Res}(z_0),$$

wobei die den Punkt $z=\alpha$ passierende Kurve C_α gemäß Fig. 3 liegt.

Um $\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\alpha}$ asymptotisch zu entwickeln, hat man

$$w=\frac{z}{\alpha}-\log\frac{z}{\alpha}=1+\frac{\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{z}{\alpha}-1\right)^3}{3}+\dots$$

als neue Integrationsvariable einzuführen, sodann mittels der Umkehrfunktion $z(w)$, die an der Stelle $w=1$, $z=\alpha$ einen Verzweigungspunkt erster Ordnung besitzt, den Integranden nach $\sqrt{w-1}$ zu entwickeln: $\frac{F(z)}{z}dz=\sum\limits_{\nu=-1}^{\infty}\alpha_\nu(w-1)^{\frac{\nu}{2}}dw$, und formal gliedweise zu integrieren; schließlich muß noch formal mit der asymptotischen Entwicklung

$$\frac{n!}{n^n}\sim e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\dots\right) \tag{130}$$

multipliziert werden. So erhält man

$$\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\alpha}e^{n\left(\frac{z}{\alpha}-\log\frac{z}{\alpha}\right)}\frac{F(z)}{z}dz\sim F(\alpha)-\frac{1}{n}\frac{\alpha^2F''(\alpha)}{2}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{\alpha^3F'''(\alpha)}{3}+\frac{\alpha^4F^{(4)}(\alpha)}{8}\right)+\dots. \tag{130a}$$

Aus (128a), (129) folgt

$$\frac{n!(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{K_q}\int\limits_{K_y} \tag{131}$$

$$=\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{s\eta}}e^{n\left(\frac{p}{s\eta}-\log\frac{p}{s\eta}\right)}\left[\Phi_{0,a}(p,p)-\frac{p}{n}\frac{\partial\Phi_{0,a}(p,y)}{\partial y}\Big|_{y=p}\right]\frac{dp}{p}$$

$$+\frac{n!}{n^n}\sum_{p_0}{}'e^{n\left(\frac{p_0}{s\eta}-\log\frac{p_0}{s\eta}\right)}\operatorname{Res}(p_0),$$

(wobei $\operatorname{Res}(p_0)$ ein Polynom in n ist), und hierin fällt, wenn als $C_{s\eta}$ zunächst ein die erwähnte Kurvenschleife umgebendes, die Stelle $p=s\eta$ enthaltendes Oval gewählt wird, die Summe $\sum'_{p_0}$ für hinreichend kleines $s\eta$ leer aus, da $\Phi_{0,a}(p,y)$ für hinreichend kleines p und y regulär ist. Mit (130a) hat man also auch

$$\frac{n!(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{K_p}\int\limits_{K_y}=\Phi_{0,a}(s\eta,s\eta)+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{131a}$$

für hinreichend kleines η.

Nunmehr betrachten wir das zweite Glied von (128), das Doppelintegral $\int\limits_{C'_p}\int\limits_{K_y}$. Dieses Glied verschwindet, falls t'', die obere Grenze der virtuellen Abfertigungszeiten, der Ungleichung

$$t''\leqq\frac{1}{\eta} \tag{132}$$

genügt; da infolge der Normierung (120) $t'' \geqq 1$ ist, kann (132) jedenfalls nur für $\eta \leqq 1$ erfüllt sein. Daß $\int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y}$ für $t'' \leqq \frac{1}{\eta}$ verschwindet, ist insbesondere im Falle $s = 1$, in welchem $\Phi_{0,1} = \Phi_0$ durch Gleichung (106) gegeben ist, leicht einzusehen. Mit (106) wird nämlich

$$(133)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+1}(p-y)} y \frac{1-\varepsilon(y-p)}{p-y\,\varepsilon(y-p)} \left[\frac{p}{n} \frac{p^n - y^n}{y^n(p-y)} - 1\right] dp\, dy \qquad (s=1),$$

und hierin darf $\dfrac{1}{p - y\,\varepsilon(y-p)}$ durch $\sum\limits_{\nu=0}^{n-2} y^\nu \varepsilon^\nu (y-p) \dfrac{1}{p^{\nu+1}}$ ersetzt werden, da der Integrand innerhalb des (hinreichend klein gewählten) Kreises K_y nur den Pol $(n-1)$-ter Ordnung $y = 0$ hat; verschiebt man sodann C_p' nach $\Re(p) = -\infty$ hin, so bringen die Faktoren

$$e^{\frac{np}{\eta}} \varepsilon^\nu (y-p) = e^{\frac{np}{\eta}} \left(\int\limits_{t'}^{t''} e^{(y-p)t}\, df(t) \right)^\nu = O\left(e^{np\left(\frac{1}{\eta} - \frac{\nu}{n} t''\right)} \right)$$

wegen (132) das Integral $\int\limits_{C_p'} \ldots dp$ zum Verschwinden.

Um auch für $s > 1$ den gleichen Nachweis zu führen, hat man die einzelnen Glieder der Neumannschen Reihenentwicklung für $\Phi_{0,\alpha}(p, y)$ zu betrachten, wobei sich, $\Phi_{0,\alpha}(p, y) = \sum\limits_0^\infty a_\nu(p)\, y^\nu$ (für $|y| \ll 1$) gesetzt, die Abschätzung

$$a_\nu(p) = O\left(e^{-\left[\frac{\nu}{s}\right] t'' p} \right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ergibt; wiederum darf $\Phi_{0,\alpha}$ durch $\sum\limits_{\nu=0}^{n-2} a_\nu(p)\, y^\nu$ ersetzt werden, und wie vorhin verschwindet sodann $\int\limits_{C_p'} \ldots dp$ und damit $\int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y}$. Ist (132) nicht erfüllt, so verschwindet $\int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y}$ i. a. nicht; für unser Beispiel (112a, b) etwa wird $\dfrac{1-\varepsilon(y-p)}{p - y\,\varepsilon(y-p)} = \dfrac{1}{p+1}$, und dies gibt, in (133) eingesetzt und $\int\limits_{C_p'}$ durch das Residuum in $p = -1$ ersetzt,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y} = (-1)^{n+1} e^{-\frac{n}{\eta}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_y} \frac{y}{y+1} \left(\frac{1}{n} \frac{y^n - (-1)^n}{y^n (y+1)} + 1 \right) dy$$

$$= (-1)^n \frac{n-1}{n} e^{-\frac{n}{\eta}} \neq 0 \qquad \left(s = 1,\ \ \varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}\right).$$

Bei der weiteren Betrachtung von $\int\limits_{C_p'} \int\limits_{K_y}$ beschränken wir uns auf Ver-

teilungsfunktionen gemäß (117) (bei denen $t'' = \infty$ ist und (132) daher für kein η erfüllt ist) und demnach auf rationales $\Phi_{0,a}(p, y)$, Da die Funktion $\Phi_{0,a}$ nach Früherem jedenfalls für $\Re(p) \geqq 0$, $|y| < \varrho$ regulär ist, liegen ihre Pole $p(y)$ für hinreichend kleines $|y|$ links von der imaginären Achse; im Falle (112a, b) z. B. konvergieren diese Pole gemäß (115) für $y \to 0$ gegen die Punkte $p = -1, -2, \ldots, -s$. Verschiebt man daher in (128) bei hinreichend kleinem K_y die Kurve C_p' nach $\Re(p) = -\infty$, so reduziert sich $\int_{C_p'} \ldots dp$ auf die Residuensumme bezüglich der endlich vielen (N) Nullstellen des Nenners von $\Phi_{0,a}$, und nach Streichung überflüssiger Bestandteile erhält man

$$(134) \quad \frac{n!(s\eta)^n}{n^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p'} \int_{K_y} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{n!(s\eta)^n}{n^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_y} \frac{e^{\frac{n p_\nu(y)}{s\eta}}}{n y^n (p_\nu - y)^2} \frac{P(p_\nu, y)}{Q_p(p_\nu, y)} dy$$

$$\left(\Phi_{0,a}(p, y) = \frac{P(p, y)}{Q(p, y)}, \qquad Q_p(p, y) = \frac{\partial Q(p, y)}{\partial p}\right).$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe, die von der Form

$$(134\,a) \qquad \frac{n!}{n^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_y} e^{n\left(\frac{p_\nu(y)}{s\eta} - \log \frac{y}{s\eta}\right)} F_\nu(y)\, dy,$$

mit algebraischem $F_\nu(y)$, sind, müssen nun nach der Sattelpunktsmethode entwickelt werden.

Man hat also den Exponenten

$$(135) \qquad w = \frac{p_\nu(y)}{s\eta} - \log \frac{y}{s\eta}$$

als neue Integrationsvariable einzuführen:

$$(136) \quad \frac{n!}{n^n}(s\eta)^n \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p'} \int_{K_y} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{n!}{n^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_y} e^{n\left(\frac{p_\nu(y)}{s\eta} - \log \frac{y}{s\eta}\right)} F_\nu(y)\, dy$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{n!}{n^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} e^{nw} G_\nu(w)\, dw$$

und den Integrationsweg jedes Summanden in der unendlichvielblättrigen (möglicherweise zerfallenden) Riemannschen Fläche der $G_\nu(w)$ nach $\Re(w) = -\infty$ hin zu verschieben, wobei endlich viele Pole w_0 des Integranden überstrichen werden und die Integrationskurven an den Verzweigungsstellen w_v der $G_\nu(w)$ hängen bleiben. Dadurch geht (136) über in die Residuensumme $\frac{n!}{n^{n+1}} \sum_{w_0} e^{n w_0} \operatorname{Res}(w_0)$ ($\operatorname{Res}(w_0)$ ein Polynom in n) bezüglich der erwähnten Pole, nebst einer Anzahl zur reellen w-Achse

paralleler Umläufe $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v}$ um die Verzweigungsschnitte C_v, also

$$(137)\quad \frac{n!\,(s\eta)^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{K_y}=\frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{w_v}e^{nw_0}\operatorname{Res}(w_0)+\frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{w_v}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v}e^{nw}G_\nu(w)\,dw.$$

Durch das an dem Sonderfall (129) geschilderte Verfahren ergibt sich für jedes dieser Umlaufsintegrale

$$(137\,a)\quad \frac{n!}{n^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v}e^{nw}G_\nu(w)\,dw=\frac{n!}{n^{n+1}}O\left(e^{nw_v}n^{k_v}\right)=O\left(e^{n(w_v-1)}n^{k_v-\frac{1}{2}}\right),$$

mit geeignetem rationalem k_v. Die Summe Σ_{w_v} enthält endlich viele Summanden, denn als Verzweigungspunkte w_v kommen höchstens in Betracht:

1. Die w-Bilder derjenigen Verzweigungspunkte der $p_\nu(y)$, welche Windungspunkten der p-Ebene entsprechen;

2. diejenigen w, für welche in Gleichung (135) $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ ist, also die w-Bilder der Nullstellen $y_0(\eta)$ der Gleichung

$$(138)\qquad y\,p_\nu'(y)=s\,\eta,$$

und deren gibt es, da $y\,p_\nu'(y)$ eine algebraische Funktion ist, für jedes η ebenfalls nur endlich viele.

Aus (128), (131), (137) folgt

$$(139)\quad w_a=\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{s\eta}}+\frac{n!}{n^n}\left(\sum_{p_0}e^{n\left(\frac{p_0}{s\eta}-\log\frac{p_0}{s\eta}\right)}\operatorname{Res}(p_0)+\sum_{w_0}e^{nw_0}\frac{1}{n}\operatorname{Res}(w_0)\right)$$
$$+\frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{w_v}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v}e^{nw}G_\nu(w)\,dw.$$

In dieser Formel ist $w_a=O(1)$ (als Wahrscheinlichkeit) und ebenso nach Früherem $\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{s\eta}}=O(1)$; wir wollen zeigen, daß im allgemeinen alle nicht identisch fortfallenden Glieder der letzten drei Summen $O(e^{-cn})$ sind, mit geeignetem $c(\eta)>0$.

Für die Umlaufsintegrale $\int_{C_v}$ gilt, mit Ausnahme von höchstens endlichen vielen η, unter $y_0(\eta)$ die Lösung von (138) verstanden, genauer

$$(137\,b)\qquad \frac{n!}{n^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_v}e^{nw}G_\nu(w)\,dw$$
$$=\frac{e^{n(w_v-1)}}{n}\frac{P(p_\nu(y_0(\eta));\,y_0(\eta))}{Q_p(p_\nu(y_0(\eta));\,y_0(\eta))}\left(\frac{p_\nu''(y_0)}{s\eta}+\frac{1}{y_0^2(\eta)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

mit nichtverschwindendem Koeffizienten von $e^{n(w_v-1)}$; wäre daher der Realteil eines der Exponenten $\frac{p_0}{s\eta} - \log\frac{p_0}{s\eta}$, w_0, w_v eines nicht identisch fortfallenden Gliedes von (139) größer als 1, so würde das Glied mit größtem Exponentenrealteil die Größenordnung der rechten Seite von (139) bestimmen, im Widerspruch zu $w_a = O(1)$.

Eine nähere Untersuchung würde zeigen, daß in (139) (wenn das w-Bild von $C_{s\eta}$ ebenfalls als Parallele zur reellen w-Achse gezogen wird) alle auf die Pole und Verzweigungsstellen erster Art bezüglichen Glieder identisch fortfallen. Ohne näheres Eingehen darauf kann aber die Möglichkeit, daß der Realteil eines einer dieser Stellen zugehörigen Exponenten $=1$ wird — natürlich kommen nur endlich viele η in Betracht —, nicht ausgeschlossen werden. Ebenso ist, solange nicht die besonderen Eigenschaften von $\Phi_{0,a}(p, y)$ herangezogen werden, die Möglichkeit offenzuhalten, daß das Maximum des Realteils einer der in $\sum_{w_v}$ auftretenden Verzweigungsstellen w_v zweiter Art $=1$ wird; für ein solches w_v und η müßte nach (135), (138) gelten:

$$\Re(w_v) = \Re\left(\frac{p_\nu}{s\eta} - \log\frac{y}{s\eta}\right) = 1; \qquad \frac{\partial w_v}{\partial y} = \frac{p_\nu'}{s\eta} - \frac{1}{y} = 0;$$

$$\frac{d\,\Re(w_v)}{d\eta} = \Re\left(\frac{dw_v}{d\eta}\right) = \Re\left(\frac{\partial w_v}{\partial y}\frac{dy}{d\eta} + \frac{\partial w_v}{\partial \eta}\right) = \Re\left(\frac{-p_\nu}{s\eta^2} + \frac{1}{s\eta}\right) = 0,$$

und daher

$$\Re(p_\nu(y)) = s\eta, \qquad |y| = s\eta, \qquad y\,p_\nu'(y) = s\eta, \tag{140}$$

und diese drei Gleichungen sind jedenfalls nur für endlich viele η gleichzeitig erfüllt.

Daher ist, höchstens endlich viele η ausgenommen,

$$w_a = \frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{s\eta}} e^{n\left(\frac{p}{s\eta} - \log\frac{p}{s\eta}\right)}\left(\Phi_{0,a}(p, p) - \frac{p}{n}\left.\frac{\partial\,\Phi_{0,a}(p, y)}{\partial y}\right|_{y=p}\right)\frac{dp}{p} + O(e^{-cn}) \tag{141}$$

$$(c(\eta) > 0),$$

so daß die asymptotische Entwicklung dieses Integrals zugleich die von w_a gibt; insbesondere ist, mit (130a), (116),

$$w_a = \Phi_{0,a}(s\eta, s\eta) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sum_{\nu=a}^{s}{}' \frac{(s\eta)^\nu}{\nu!}}{\sum_{\nu=0}^{s}{}' \frac{(s\eta)^\nu}{\nu!}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (a = 1, 2, \ldots, s). \tag{142}$$

In gleicher Weise erhält man aus Gleichung (102) für die Wahrschein-

lichkeit W_a:

$$(143)\quad W_a = \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s\eta}} e^{n\left(\frac{p}{s\eta} - \log\frac{p}{s\eta}\right)} \left(\Phi_{0,a}(p,p) - \frac{p}{n+1} \frac{\partial \Phi_{0,a}(p,y)}{dy}\Big|_{y=p} \right) \frac{s\eta}{p^2}\, dp,$$

so daß w_a und W_a für $n \to \infty$ übereinstimmen:

$$(144)\quad \lim_{n\to\infty} w_a = \lim_{n\to\infty} W_a = \Phi_{0,a}(s\eta, s\eta) \qquad (a = 1, 2, \ldots, s).$$

Für die Wahrscheinlichkeiten $w_a(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ schließlich folgt durch das gleiche Verfahren

$$(145)\quad w_a\left(\frac{n\tau}{s\eta}\right) = W_a + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (0 < \tau < 1),$$

giltig für von n unabhängiges τ und für alle $\eta \geqq 0$. Da die W_a Konstanten sind, folgt aus (145) insbesondere, daß die $w_a(t)$ im Grenzfall $n = \infty$ zeitunabhängig werden; es wird hier also *bewiesen*, daß in diesem Grenzfalle, der im wesentlichen der von A. K. Erlang (s. § 1) behandelte Fall ist, statistisches Gleichgewicht herrscht.

Die unser Problem beherrschende Funktion $\Phi_{0,a}(p, y)$ läßt sich auf verschiedene Weise durch die früher definierten Wahrscheinlichkeiten ausdrücken; z. B. folgt aus Gleichung (87), mit einer komplexen Variablen z, $(\bar{\bar{s}}_{0,a} = 1$ gesetzt):

$$\sum_{m=0}^{n-1} (\bar{\bar{s}}_{m,a} - \bar{\bar{s}}_{m+1,a}) z^m = \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_y} \frac{e^{pT}}{p^{n+1}} \frac{\left(\frac{pz}{y}\right)^n - 1}{pz - y} \Phi_{0,a}(p, y)\, dp\, dy$$

und daraus durch das auf w_a angewandte Verfahren

$$(146)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (\bar{\bar{s}}_{m,a} - \bar{\bar{s}}_{m+1,a}) z^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (\bar{\bar{s}}_{m,a} - \bar{\bar{s}}_{m+1,a}) z^m = \Phi_{0,a}(s\eta, s\eta z) \quad (|z| < 1,\ a = 1, 2, \ldots, s),$$

gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho < 1$ und *alle* $\eta \geqq 0$.

§ 11.

Lösung des Systems (88) für $s = 2$, $\varepsilon(z) = e^z$.

Zum Schlusse soll das System (88) für den einfachsten Fall $s = 2$ auch unter der Annahme konstanter virtueller Abfertigungszeit gelöst werden. Setzt man diese Konstante gleich 1, so gilt für die Verteilungsfunktion $f(t)$ jetzt

$$(147a)\quad f(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 1, \\ 1, & \text{für } t > 1; \end{cases}$$

die Normierungsbedingung $\int_{1-0}^{1+0} t\,df(t) = 1$ ist erfüllt, und für $\varepsilon(z)$ erhält man

$$\varepsilon(z) = \int_{1-0}^{1+0} e^{zt}\,df(t) = e^{z}. \tag{147b}$$

Wir beschränken uns der Kürze halber auf den Fall $a = 2$; aus (88) wird dann, wenn $p + y$ statt p gesetzt und Φ_0, bzw. u und $\Phi_1(u)$ statt $\Phi_{0,2}(p+y, y)$, bzw. p_1 und $\Phi_{1,2}(p_1, p+y, y)$ geschrieben wird,

$$\Phi_0 = \frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-\xi)}\,\Phi_1(\xi)\,d\xi \qquad (\Re(p-\xi) > 0) \tag{148a}$$

$$\Phi_1(u) = \frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,(\Phi_1(u) + \Phi_1(\xi) - \Phi_0 + 1)\,d\xi, \tag{148b}$$

$$(\Re(p-u-\xi) > 0).$$

Aus der letzten Gleichung folgt wegen $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,d\xi = \frac{e^{u-p}-1}{p-u}$

$$\left(1 - \frac{y}{p-u}(e^{u-p}-1)\right)\Phi_1(u) = \frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\Phi_1(\xi)\,d\xi + y\,\frac{e^{u-p}-1}{p-u}\,(1-\Phi_0); \tag{149}$$

multipliziert man mit $\frac{p-u}{y(\Phi_0-1)}$ und führt eine neue Funktion $L(u)$ ein durch

$$L(u) = \frac{p-u+y-ye^{u-p}}{y(\Phi_0-1)}\,\Phi_1(u) + e^{u-p}, \tag{150}$$

so wird aus (149), (148a)

$$L(u) = \frac{y(p-u)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{L(\xi)-e^{\xi-p}}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}\,d\xi + 1, \tag{151a}$$

$$\Phi_0 = y(\Phi_0-1)\frac{y}{2\pi i}\int \frac{e^{\xi}-1}{\xi(p-\xi)}\,\frac{L(\xi)-e^{\xi-p}}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}\,d\xi. \tag{151b}$$

Aus (151b) folgt durch Vergleich mit (151a)

$$\Phi_0 = \frac{y(\Phi_0-1)}{p}\,(L(0)-1)$$

oder

$$\Phi_0 = 1 + \frac{p}{yL(0) - y - p}, \tag{152}$$

so daß alles auf die Funktion $L(u)$ zurückgeführt ist.

In (151a) verschwindet ersichtlich, $y \ll 1$ vorausgesetzt, der Integrandenanteil des Bestandteils $-e^{\xi-p}$, so daß man weiter die Integralgleichung

$$L(u) = \frac{y(p-u)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{L(\xi)}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}\,d\xi + 1 \tag{153}$$

erhält, deren Lösung nach Früherem für $y \ll 1$ durch die zugehörige Neumannsche Reihe

$$(153\,a) \qquad L(u) = 1 + \frac{y(p-u)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{d\xi}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}$$

$$+\frac{y(p-u)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{1}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}\,\frac{y(p-\xi)}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{-\xi_1}-1}{\xi_1(p-\xi-\xi_1)}\,\frac{d\xi_1}{p-\xi_1+y-ye^{\xi_1-p}}\,d\xi+\cdots$$

geliefert wird.

Man denke sich nun im zweiten Gliede dieser Reihe an Stelle des Integrandenfaktors $\dfrac{1}{p-\xi+y-ye^{\xi-p}}$ die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ye^{\xi-p})^\nu}{(p-\xi+y)^{\nu+1}}$ eingesetzt und verschiebe sodann C nach links; dann verschwinden wegen des Faktors $e^{\nu\xi}$ die Beiträge aller Glieder dieser Reihe mit Ausnahme des Anfangsgliedes, so daß für das zweite Glied in (153 a) auch $\dfrac{y(p-u)}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{d\xi}{p-\xi+y}$ geschrieben werden darf, d. h. im Integrandennenner darf $ye^{\xi-p}$ fortgelassen werden. Mit der gleichen Begründung darf $ye^{\xi-p}$ auch in allen übrigen Gliedern der Neumannschen Reihe gestrichen werden, woraus folgt, daß $L(u)$ auch der Integralgleichung

$$(154) \qquad L(u) = \frac{y(p-u)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi(p-u-\xi)}\,\frac{L(\xi)}{p-\xi+y}\,d\xi + 1 \qquad \begin{pmatrix}\Re(p-u-\xi)>0\\ \Re(p-\xi+y)>0\end{pmatrix}$$

genügt.

Um diese Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst für ein C_u (Parallele zur imaginären Achse) und eine Konstante α das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_u}\frac{L(u)\,e^{-u}}{u-\alpha}\,du \qquad (\Re(u-\alpha)>0).$$

Aus (154) folgt unter Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen

$$(155) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_u}\frac{L(u)\,e^{-u}}{u-\alpha}\,du = \frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi}\,\frac{L(\xi)}{p-\xi+y}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_u}\frac{(p-u)\,e^{-u}\,du}{(u-\alpha)(p-u-\xi)}\,d\xi$$

$$= \frac{y}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-\xi}-1}{\xi}\,\frac{L(\xi)}{p-\xi+y}\,\frac{\xi e^{\xi-p}}{p-\xi-\alpha}\,d\xi$$

$$= \frac{ye^{-p}}{2\pi i}\int_C \frac{1-e^{\xi}}{p-\xi+y}\,\frac{L(\xi)}{p-\xi-\alpha}\,d\xi \qquad \begin{pmatrix}\Re(p-\xi+y)>0\\ \Re(p-\xi-\alpha)>0\end{pmatrix}.$$

Wie die Neumannsche Reihe von (154) leicht erkennen läßt, bleibt $L(u)$ bei vorgegebenem p für $y < \varrho(p,c)$ links von jeder Geraden $\Re(u) = c$ regulär und beschränkt; daher verschwindet das letzte Integral, so daß man hat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{L(\xi)\,e^{-\xi}}{\xi-\alpha}\,d\xi = 0 \qquad (\Re(\xi-\alpha)>0), \tag{156}$$

und hieraus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{L(\xi)\,e^{-\xi}}{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}\,d\xi = 0 \qquad (\Re(\xi-\alpha_\nu)>0,\ \nu=1,2,3). \tag{156a}$$

Wir behandeln nun die Anteile des Minuenden $e^{-\xi}$ und des Subtrahenden 1 des Integrandenfaktors $e^{-\xi}-1$ in (154) gesondert: Für den ersten Anteil verschieben wir C nach rechts, für den letzteren nach links ins Unendliche; dann folgt aus (154) mit (156a)

$$L(u) = y(p-u)\left(\frac{e^{u-p}}{(p-u)(u+y)}L(p-u) - \frac{e^{-p-y}}{(p+y)(u-y)}L(p+y)\right) - \frac{y}{p+y}L(0)+1$$

oder

$$L(u) = y\frac{e^{u-p}}{u+y}L(p-u) - \frac{y(p-u)e^{-p}}{(u+y)(p+y)}L(p+y) - \frac{y}{p+y}L(0)+1. \tag{157}$$

Wir haben also aus der linearen Integralgleichung (154) eine lineare Funktionalgleichung für $L(u)$ gewonnen; ersetzt man in dieser u durch $p-u$ p und 0, so ergeben sich vier in $L(u)$, $L(0)$, $L(p-u)$, $L(p+y)$ und $L(p)$ lineare Gleichungen, und durch Elimination der letzten drei Unbekannten erhält man

$$L(u) = \frac{(p-u+y)\,(u(p+y+ye^{-p})-pye^{-p})+ye^{u-p}(p^2+py-u(p+y+ye^{-p})}{p[(u+y)(p-u+y)-y^2e^{-p}]} \perp \frac{L(0)\cdot y(p-2u)(p+y-u-ye^{u-p})}{p[(u-y)(p-u-y)-y^2e^{-p}]}. \tag{158}$$

Aus dieser Gleichung, die für $u=0$ zu einer Identität wird, kann rückwärts wieder die Gleichung (157) abgeleitet werden, so daß (157) nicht ausreicht, um $L(u)$ vollständig zu bestimmen. Die noch fehlende „Konstante“ $L(0)$ ergibt sich aber, ohne Zurückgreifen auf die Integralgleichung (154), aus der Eigenschaft von $L(u)$, für hinreichend kleines $|y|$ links von jeder Geraden $\Re(u)=$ konst. regulär zu bleiben. Daraus folgt nämlich, daß der Zähler von (158) in den beiden Nenner-Nullstellen

$$u = \frac{p}{2} \pm \sqrt{D}, \qquad \left(D = \left(\frac{p}{2}+y\right)^2 - y^2e^{-p}\right) \tag{159}$$

verschwindet, so daß sich für $L(0)$ der Ausdruck

$$L(0) = \frac{\left(\frac{p}{2}(p+y-ye^{-p}) - \sqrt{D}\,(p+y+ye^{-p})\right)e^{\sqrt{D}-\frac{p}{2}}}{2\sqrt{D}\left(-ye^{\sqrt{D}-\frac{p}{2}} + \frac{p}{2}+y-\sqrt{D}\right)} + \frac{y^2e^{-2p} - (p+y)\left(y+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}e^{-p}\right) + \sqrt{D}\,(p+y)(1+e^{-p})}{2\sqrt{D}\left(-ye^{\sqrt{D}-\frac{p}{2}} + \frac{p}{2}+y-\sqrt{D}\right)} \tag{160}$$

ergibt, der natürlich gegenüber der Substitution $(\sqrt{D}:-\sqrt{D})$ invariant ist.

Durch (160), (158) ist nunmehr $L(u)$ und daher durch (150), (152) auch $\Phi_1(u)$ und Φ_0 bekannt. Für letzteres folgt aus (152), (160)

$$(161)\quad \Phi_0 = \Phi_{0,2}(p+y,y) = \frac{y}{p+y-ye^{-p}}\left(\frac{\left(\frac{p}{2}(p+y-ye^{-p})-\sqrt{D}\,(p-y+ye^{-p})\right)e^{\sqrt{D}-}}{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{D}\right)ye^{\sqrt{D}-\frac{p}{2}}+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{D}\right)\left(\frac{p}{2}+y-\sqrt{D}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{y^2+\frac{py}{2}-e^{-p}\left(\frac{p^2}{2}+\frac{py}{2}+2y^2\right)+y^2e^{-2p}+\sqrt{D}\,((p+y)e^{-p}-}{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{D}\right)ye^{\sqrt{D}-\frac{p}{2}}+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{D}\right)\left(\frac{p}{2}+y-\sqrt{D}\right)}\right)$$

$$(s=2,\ \varepsilon(z)=e^z).$$

Hieraus ergibt sich insbesondere durch den Grenzübergang $p\to 0$:

$$\Phi_{0,2}(y,y)=\frac{\frac{y^2}{2}}{1+y+\frac{y^2}{2}},$$

im Einklange mit dem Falle $s=2$ der für beliebiges $\varepsilon(z)$ gültigen Formel (125).

(Eingegangen am 2. August 1931.)

Contributions to the analytic theory of numbers.

By

S. Chowla in Delhi (India).

Introduction.

Let $\varphi(n)$ denote the number of positive integers not exceeding n and prime to it. It has long been known that

$$\Phi(x) = \sum_{n \leqq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + E(x)$$

where [1])

$$E(x) = O(x \log x). \tag{1}$$

With regard to (1) Landau [2]) has said that „Trotzdem man in der Primzahltheorie alle elementar erhaltenen Abschätzungen weit verschärfen konnte, ist über $\Phi(x)$ auch unter Zuhilfenahme aller Werkzeuge nichts weiter zutage gefördert worden als diese so naheliegende Abschätzung". It was recently shown that [3])

$$E(x) = \Omega(x \log\log\log x). \tag{2}$$

In this paper I prove that

$$\int_1^x E^2(u)\, du \sim \frac{1}{6\pi^2} x^3. \tag{3}$$

The proof of this result lies rather deep. In particular I use the Prime Number Theorem.

In the second half of this paper I am concerned with some "divisor" problems. Let $\sigma_\theta(n)$ denote the sum of the θth. powers of the divisors of n,

$$\sigma_\theta(n) = \sum_{d \mid n} d^\theta$$

and let $R_\theta(x)$ denote the non trivial error term in the asymptotic expression for

$$S_\theta(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma_\theta(n).$$

---

[1]) J. Mertens, Crelle's Journal 77 (1874), p. 289—338 (290—291).

[2]) Landau, Handbuch, p. 579.

[3]) S. S. Pillai and S. D. Chowla, Journ. London Math. Soc. 5 (1930), p. 95—101 (Theorem V).

In the case $\theta = 0$ Hardy [4]) showed that for every positive ε

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du = O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

This result was generalized and sharpened by Cramér [5]) who proved the following results:

If $|\theta| < \frac{1}{2}$, then

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du \sim C_\theta\, x^{\frac{3}{2}+\theta}; \tag{4}$$

if $-1 \leqq \theta \leqq -\frac{1}{2}$, then

$$\frac{1}{x}\int_1^x |R_\theta(u)|\,du = O\left(\log^{1+\frac{1}{2}\theta} x\right); \tag{5}$$

if $\frac{1}{2} \leqq \theta \leqq 1$, then

$$\frac{1}{x}\int_1^x |R_\theta(u)|\,du = O\left(x^\theta \log^{1-\frac{1}{2}\theta} x\right). \tag{6}$$

In this paper I sharpen the results (5) and (6) by showing that:

If $-1 < \theta < -\frac{1}{2}$, then

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du = \left(\frac{1}{4}\zeta^2(-\theta) + \frac{1}{12}\,\frac{\zeta(-2\theta)\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)}\right)x + O\left(x^{\frac{3}{2}+\theta}\log x\right), \tag{7}$$

where $\zeta(s)$ is Riemann's zeta function; if $\frac{1}{2} < \theta < 1$, then

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du \sim \frac{1}{12(1+2\theta)}\,\frac{\zeta(2\theta)\zeta^2(1+\theta)}{\zeta(2+2\theta)}\,x^{1+2\theta}; \tag{8}$$

if $\theta = -\frac{1}{2}$, then

$$\frac{1}{x}\int_1^x |R_\theta(u)|\,du = O(\log^{\frac{1}{2}} x); \tag{9}$$

if $\theta = \frac{1}{2}$, then

$$\frac{1}{x}\int_1^x |R_\theta(u)|\,du = O(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} x). \tag{10}$$

It is evident from (7) and (8) that the right hand sides of (5) and (6) are $O(1)$ and $O(x^\theta)$ according as $-1 < \theta < -\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2} < \theta < 1$, while (9) and (10) are better than Cramér's results by a factor $\log^{\frac{1}{4}} x$.

To prove (3), (7), (8), (9) and (10) I use a method which has

---

[4]) Proc. London Math. Soc. (2) **15** (1916), p. 192—213.

[5]) "Contributions to the analytic theory of numbers", Fifth Congress of Scandinavian Mathematicians, Helsingfors, 1923.

recently been developed by Walfisz [6]) in his paper „Teilerprobleme. Zweite Abhandlung". In this paper Walfisz has shown that

$$\int_1^x R_{-1}^2(u)\,du = \left(\left(\frac{\gamma+\log 2\pi}{2}\right)^2 + \frac{5\pi^2}{144}\right)x + O(x^{\frac{1}{2}}\log x), \tag{11}$$

where γ is Euler's constant; and

$$\int_1^x R_1^2(u)\,du = \frac{36+5\pi^2}{432}\,x^3 + O(x^{\frac{5}{2}}\log x). \tag{12}$$

It is evident that when $\theta = -1$ (11) shows that (5) can be improved by a factor $\log^{\frac{1}{2}} x$, and that when $\theta = 1$ (12) implies a sharpening of (6) by a factor $\log^{\frac{1}{2}} x$.

I denote by $[x]$ the greatest integer contained in x, and write

$$R(x) = x - [x], \qquad \psi(x) = R(x) - \frac{1}{2}; \tag{13}$$

$\mu(n)$ for Möbius's function, $M(x) = \sum_{n\leqq x}\mu(n)$,

$$M_1(x) = \sum_{n\leqq x}{}'\frac{\mu(n)}{n}, \qquad M_2(x) = \sum_{n>x}{}'\frac{\mu(n)}{n^2}; \tag{14}$$

$$H(x) = \sum_{n\leqq x}{}'\frac{\varphi(n)}{n} - \frac{6}{\pi^2}x. \tag{15}$$

I denote by B varying constants whose values may depend upon any of the variables under consideration but which are numerically less than a certain absolute constant (in the proofs of (3), (9), (10)) and numerically less than a constant depending only on θ (in the proofs of (7) and (8)).

Numerals in thick print are to be regarded as references to the equations of this paper.

§ 1.

Proof of (3).

Throughout this section $x \geqq 4$.

Lemma 1:

$$M(x) = \frac{Bx}{\log^{30} x}, \tag{16}$$

[6]) Mathematische Zeitschrift **34** (1931), p. 448—472. I am very much indebted to Dr. Walfisz for letting me see his paper before it was sent to the press.

Results equivalent to (11) and (12) in the dominant terms but less sharp in the error terms were obtained independently by Mr. H. Davenport.

$$M_1(x) = \frac{B}{\log^{29} x}, \tag{17}$$

$$M_2(x) = \frac{B}{x \log^{30} x}. \tag{18}$$

Proof: (16) is well known [7]. We have

$$M_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n} = - \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n}$$

$$= - \frac{M(x+1) - M(x)}{[x+1]} - \frac{M(x+2) - M(x+1)}{[x+2]} - \dots = \frac{M(x)}{[x+1]} - \sum_{n>x} \frac{M(n)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{B}{\log^{30} x} + \sum_{n>x} \frac{B}{n \log^{30} n} \, (16) = \frac{B}{\log^{29} x},$$

$$M_2(x) = - \frac{M(x)}{[x+1]^2} + \sum_{n>x} M(n) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \frac{B}{x \log^{30} x} \, (16).$$

Lemma 2: *We have*

$$H(x) = - \sum_{n \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(n)}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{B}{\log^{20} x}. \tag{19}$$

Proof:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} \quad [8]. \tag{20}$$

$$H(x) = \sum_{d \leqq m} \frac{\mu(d)}{d} \left[\frac{x}{d}\right] + \sum_{d \leqq \frac{x}{m}} M_1\left(\frac{x}{d}\right) - \left[\frac{x}{m}\right] M_1(m) - \frac{6}{\pi^2} x \qquad (15, 20)$$

$$= \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d} \left[\frac{x}{d}\right] + \sum_{d \leqq \log^5 x} M_1\left(\frac{x}{d}\right) - [\log^5 x] \, M_1\left(\frac{x}{\log^5 x}\right) - \frac{6}{\pi^2} x$$

$$= \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d} \frac{x}{d} - \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d} \psi\left(\frac{x}{d}\right) - \frac{1}{2} \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d}$$

$$+ \frac{B \log^5 x}{\log^{29} x} + \frac{B \log^5 x}{\log^{29} x} - \frac{6}{\pi^2} x \qquad (13, 17)$$

$$= -x \sum_{d > \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d} \psi\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{B}{\log^{24} x} \qquad (17)$$

$$= - \sum_{d \leqq \frac{x}{\log^5 x}} \frac{\mu(d)}{d} \psi\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{B}{\log^{20} x} \qquad (18) \tag{21}$$

and the proof of (19) is complete.

---

[7]) Landau, Handbuch, p. 570 (6).

[8]) Landau, Handbuch, p. 578 (2).

We now denote by $\eta(x)$ the function inverse to $\xi(x) = \frac{x}{\log^5 x}$ and write

$$j = \operatorname{Max}(\eta(a);\ \eta(b);\ 4) = \operatorname{Max}(\eta(a);\ \eta(b)) \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3, \dots \\ b = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}. \tag{22}$$

We then have

Lemma 3:

$$\int_1^x H^2(u)\,du = \sum_{a,b \leqq \xi(x)} \frac{\mu(a)\,\mu(a)}{a\,b} \int_j^x \psi'\left(\frac{u}{a}\right) \psi'\left(\frac{u}{b}\right) du + \frac{B\,x}{\log^{19} x}. \tag{23}$$

Proof:

$$\int_1^x H^2(u)\,du = B + \int_4^x H^2(u)\,du. \tag{24}$$

$$H^2(u) = \sum_{a,b \leqq \xi(u)}' \frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b} \psi'\left(\frac{u}{a}\right) \psi'\left(\frac{u}{b}\right) + \frac{B}{\log^{20} u} \sum_{a \leqq \xi(u)} \frac{\mu(a)}{a} \psi'\left(\frac{u}{a}\right) + \frac{B}{\log^{40} u} \qquad (u \geqq 4)$$

$$= \sum_{a,b \leqq \xi(u)} \frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b} \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) + \frac{B}{\log^{19} u} \qquad (u \geqq 4).$$

$$\int_4^x H^2(u)\,du = \sum_{a,b \leqq \xi(x)} \frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b} \int_{\operatorname{Max}(\eta(a);\ \eta(b);\ 4)}^x \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi'\left(\frac{u}{b}\right) du + \frac{B\,x}{\log^{19} x} \tag{25}.$$

(23) follows from (24), (26), (22).

Lemma 4 [9]):

$$\sum_{\substack{m,n=1 \\ m\,b = n\,a}}^{\infty}{}' \frac{1}{m\,n} = \frac{\pi^2}{6} \frac{(a,b)^2}{a\,b}. \tag{27}$$

Lemma 5: *If*

$$c_n = O(1), \qquad g_n = \sum_{d \mid n} c_d \tag{28}$$

then

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}{}' \frac{c_m\,c_n\,(m,n)^2}{m^2\,n^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{g_n^2}{n^2}. \tag{29}$$

Proof:

$$g_n^2 = \sum_{d \mid n} h_d, \qquad h_v = \sum_{\substack{m\,n \\ (m,n) = v}} c_m\,c_n \qquad (28). \tag{30}$$

$$\sum_1^\infty g_n^2\,n^{-s} = \sum_1^\infty n^{-s} \cdot \sum_1^\infty h_n\,n^{-s} \qquad (30). \tag{31}$$

$$\sum_1^\infty h_n\,n^{-2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_1^\infty g_n^2\,n^{-2} \qquad (31). \tag{32}$$

(29) follows from (30) and (32).

[9]) This is Hilfssatz 3 of Walfisz's paper [6]).

Lemma 6:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\,\mu(n)\,(m,n)^2}{m^2 n^2} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{33}$$

Proof: We put $c_n = \mu(n)$ in Lemma 5; then $g_1 = 1$, $g_n = 0$ $(n > 1)$.

Lemma 7 [10]):

$$\sum_{a \leqq b \leqq x} \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb \neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn\,|\,mb - na\,|} = Bx \log x. \tag{34}$$

Lemma 8 [11]):

$$\sum_{a \leqq b \leqq x} \frac{1}{ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right)} = Bx. \tag{35}$$

Lemma 9 [12]): *Let the functions* $g(u)$, $h(u)$, $s_k(u)$, $t_k(u)$ *be of integrable square in the interval* $\alpha \leqq u \leqq \beta$, *and let as* $k \to \infty$

$$\int_\alpha^\beta s_k^2(u)\,du, \qquad \int_\alpha^\beta t_k^2(u)\,du \tag{36}$$

be bounded,

$$\int_\alpha^\beta (g(u) - s_k(u))^2\,du \to 0, \qquad \int_\alpha^\beta (h(u) - t_k(u))^2\,du \to 0; \tag{37}$$

then we have

$$\int_\alpha^\beta g(u)\,h(u)\,du = \lim_{k=\infty} \int_\alpha^\beta s_k(u)\,t_k(u)\,du. \tag{38}$$

Lemma 10:

$$\sum_{a,\,b \leqq \xi(x)} \frac{\mu(a)\,\mu(b)}{ab} \int_j^x \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) du = \frac{x}{12} \sum_{a,\,b \leqq \xi(x)} \frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a^2 b^2} (a,b)^2 + \frac{Bx}{\log^4 x}. \tag{39}$$

Proof: The conditions of lemma 9 are fulfilled [13]) with $\alpha = j$, $\beta = x$, $g(u) = \psi\left(\frac{u}{a}\right)$, $h(u) = \psi\left(\frac{u}{b}\right)$,

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{k} \frac{\sin 2\pi \frac{m}{a} u}{m}, \qquad t_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin 2\pi \frac{n}{b} u}{n}. \tag{40}$$

[10]) This is Hilfssatz 6 of Walfisz's paper [6]).

[11]) This lemma is contained in the equations (77) and (78) of Walfisz's paper [6]).

[12]) This is Hilfssatz 10 of Walfisz's paper [6]).

[13]) See, for example, the formulæ (16), (40), (41) of W. Rogosinski's book "Fouriersche Reihen" (Sammlung Göschen, No. 1022).

Hence from (38) we have

$$\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b}\int_j^x\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\lim_{k=\infty}\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b}\sum_{m,\,n=1}^{k}\frac{1}{m\,n}\int_j^x\sin 2\pi\frac{m}{a}u\,\sin 2\pi\frac{n}{b}u\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\lim_{k=\infty}\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b}\left(\sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\,b=n\,a}}^{k}\frac{1}{m\,n}\int_j^x du+\sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\,b\neq n\,a}}^{k}\frac{1}{m\,n}\int_j^x\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)du\right.$$

$$\left.-\sum_{m,\,n=1}^{k}\frac{1}{m\,n}\int_j^x\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)du\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)}{a\,b}(x-j)\sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\,b=n\,a}}^{\infty}\frac{1}{m\,n}+B\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{1}{a\,b}\sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\,b\neq n\,a}}^{\infty}\frac{1}{m\,n\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|}$$

$$+B\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{1}{a\,b}\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{1}{m\,n\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)}$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)\,(a,b)^2}{a^2\,b^2}(x-j)+B\,\xi(x)\log\xi(x)+B\,\xi(x)\quad(\mathbf{27,\,34,\,35})$$

1) $$=\frac{x}{12}\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{\mu(a)\,\mu(b)\,(a,b)^2}{a^2\,b^2}+B\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{j(a,b)^2}{a^2\,b^2}+\frac{B\,x}{\log^4 x}.$$

$$\sum_{a,\,b\leqq\xi(x)}\frac{j(a,b)^2}{a^2\,b^2}=B\sum_{a,\,b\leqq x}\frac{a\log^5(2\,a)\,(a,b)^2}{a^2\,b^2}=B\sum_{a,\,b\leqq x}\frac{a^{\frac{9}{8}}(a,b)^2}{a^2\,b^2}$$

$$=B\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d^{\frac{1}{8}}}\sum_{\substack{a,\,b\leqq\frac{x}{d}\\ (a,b)=1}}\frac{1}{a^{\frac{7}{8}}\,b^2}=B\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d^{\frac{7}{8}}}\frac{x^{\frac{1}{8}}}{d^{\frac{1}{8}}}$$

(42) $$=B\,x^{\frac{1}{8}}\log x.$$

(39) follows from (41) and (42).

Lemma 11:

(43) $$\sum_{a,\,b\leqq x}\frac{\mu(a)\,\mu(b)\,(a,b)^2}{a^2\,b^2}=\frac{6}{\pi^2}+\frac{B\log x}{x}.$$

Proof:

$$\sum_{a,b=1}^{\infty} \frac{\mu(a)\mu(b)(a,b)^2}{a^2b^2} = \frac{6}{\pi^2} \tag{44}$$ **(33).**

$$\sum_{a,b>x} \frac{\mu(a)\mu(b)(a,b)^2}{a^2b^2} = B\sum_{a,b>x}\frac{(a,b)^2}{a^2b^2} = B\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{\substack{a,b>\frac{x}{d}\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^2b^2}$$

$$= B\sum_{d=1}^{m}\frac{1}{d^2}\frac{d^2}{x^2} + B\sum_{d>m}\frac{1}{d^2} = B\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{B}{x}. \tag{45}$$

$$\sum_{\substack{a\leqq x\\b>x}} \frac{\mu(a)\mu(b)(a,b)^2}{a^2b^2} = B\sum_{\substack{a\leqq x\\b>x}}\frac{(a,b)^2}{a^2b^2} = B\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{\substack{a\leqq\frac{x}{d}\\b>\frac{x}{d}\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^2b^2}$$

$$= B\sum_{d=1}^{m}\frac{1}{d^2}\frac{d}{x} + B\sum_{d>m}\frac{1}{d^2} = B\left(\frac{\log m}{x}+\frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{B\log x}{x}. \tag{46}$$

$$\sum_{\substack{b\leqq x\\a>x}} \frac{\mu(a)\mu(b)(a,b)^2}{a^2b^2} = \frac{B\log x}{x}. \tag{47}$$ **(46).**

(43) follows from (44), (45), (46), (47).

Lemma 12:

$$\int_1^x H^2(u)\,du = \frac{x}{2\pi^2} + \frac{Bx}{\log^4 x}. \tag{48}$$

Proof: (23), (39), (43).

Lemma 13:

$$E(x) = xH(x) + \frac{Bx}{\log^4 x}. \tag{49}$$

Proof:

$$H(x) = \sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n}\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{6}{\pi^2}x = x\sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{6}{\pi^2}x \quad \textbf{(15, 20)}$$

$$= -x\sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= -\sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{B}{\log^{30} x} \tag{50}$$ **(18).**

$$E(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\mu(n)\left(\left[\frac{x}{n}\right]^2+\left[\frac{x}{n}\right]\right)-\frac{3}{\pi^2}x^2 = \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2-\frac{3}{\pi^2}x^2+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\mu(n)\left(\frac{x^2}{n^2}-2\frac{x}{n}R\left(\frac{x}{n}\right)+R^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)-\frac{3}{\pi^2}x^2+\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n>x}\frac{x^2\mu(n)}{n^2}-x\sum_{n\leqq x}\frac{\mu(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\mu(n)R^2\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{2}$$

$$= xH(x)+\frac{Bx}{\log^{30}x}+\frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}\mu(n)R^2\left(\frac{x}{n}\right) \qquad (50,18). \tag{51}$$

$$\sum_{n\leqq x}\mu(n)R^2\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{Bx}{i}+\sum_{\frac{x}{i}<n\leqq x}\mu(n)R^2\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{Bx}{i}+\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{\frac{x}{t+1}<n\leqq\frac{x}{t}}\mu(n)R^2\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{Bx}{i}+\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{\frac{x}{t+1}<n\leqq\frac{x}{t}}\mu(n)\left(\frac{x-tn}{n}\right)^2 \qquad (i=[\log^4 x])$$

$$= \frac{Bx}{\log^4 x}+B\sum_{t=1}^{[\log^4 x]}\sum_{\frac{x}{t+1}<n\leqq\frac{x}{t}}\mu(n)\left(\frac{x^2-2tnx+t^2n^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{Bx}{\log^4 x}+B\sum_{t=1}^{[\log^4 x]}\left(\frac{x^2}{\frac{x}{\log^4 x}\log^{30}x}+\frac{tx}{\log^{29}x}+\frac{t^2x}{\log^{30}x}\right) \qquad (16,17,18)$$

$$= \frac{Bx}{\log^4 x}. \tag{52}$$

(49) follows from (51) and (52).

Lemma 14:

$$\int_1^x E^2(u)\,du = \frac{x^3}{6\pi^2}+\frac{Bx^3}{\log^4 x}. \tag{53}$$

Proof:

$$\int_1^x E^2(u)\,du = B+\int_4^x E^2(u)\,du \tag{54}$$

$$= B+\int_4^x\left(u^2H^2(u)+\frac{Bu^2|H(u)|}{\log^4 u}+\frac{Bu^2}{\log^8 u}\right)du \qquad (49).$$

$$\int_4^x u^2\frac{|H(u)|}{\log^4 u}\,du = B\sqrt{\int_4^x\frac{u^4\,du}{\log^8 u}\int_4^x H^2(u)\,du} = \frac{Bx^3}{\log^4 x}. \tag{55}$$

$$\int_4^x\frac{u^2}{\log^8 u}\,du = \frac{Bx^3}{\log^8 x}. \tag{56}$$

Let

$$(57)\quad \int_1^x H^2(u)\,du = H_1(x),\quad \int_1^x H_1(u)\,du = H_2(x),\quad \int_1^x H_2(u)\,du = H_3(x).$$

Then,

$$\int_1^x u^2 H^2(u)\,du$$

$$= u^2 H_1(u)\Big|_1^x - 2\int_1^x u H_1(u)\,du = x^2 H_1(x) - 2u H_2(u)\Big|_1^x + 2\int_1^x H_2(u)\,du$$

$$(58)\quad = x^2 H_1(x) - 2x H_2(x) + 2H_3(x).$$

$$(59)\qquad H_1(x) = \frac{x}{2\pi^2} + \frac{Bx}{\log^4 x} \qquad (48).$$

$$(60)\qquad H_2(x) = \frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{Bx^2}{\log^4 x} \qquad (59, 57).$$

$$(61)\qquad H_3(x) = \frac{x^3}{12\pi^2} + \frac{Bx^3}{\log^4 x} \qquad (60, 57).$$

$$(62)\quad \int_4^x u^2 H^2(u)\,du = B + \int_1^x u^2 H^2(u)\,du = \frac{x^3}{6\pi^2} + \frac{Bx^3}{\log^4 x} \quad (58, 59, 60, 61).$$

$$(63)\qquad \int_1^x E^2(u)\,du = \frac{x^3}{6\pi^2} + \frac{Bx^3}{\log^4 x} \qquad (54, 55, 56, 62).$$

(3) is a specialization of (63).

§ 2.

Proofs of (7) and (9).

Throughout this section $x \geqq 1$.

Lemma 15: *When* $-1 < \theta < 0$,

$$(64)\quad S_\theta(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma_\theta(n) = x\zeta(1-\theta) + \frac{x^{1+\theta}}{1+\theta}\zeta(1+\theta) - \sum_{n \leqq x} n^\theta \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$- x^\theta \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n^\theta}\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2}\zeta(-\theta) + Bx^{\frac{\theta}{2}}.$$

Proof:

$$S_\theta(x) = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n^\theta \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} 1 + \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} m^\theta - [\sqrt{x}] \sum_{m \leqq \sqrt{x}} m^\theta$$

$$= \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n^\theta \left(\frac{x}{n} - \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2}\right) + \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{1}{\theta+1}\left[\frac{x}{n}\right]^{\theta+1} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{n}\right]^\theta + \zeta(-\theta) + \frac{Bx^{\theta-1}}{n^{\theta-1}}\right)$$

$$- [\sqrt{x}]\left(\frac{1}{\theta+1}[\sqrt{x}]^{\theta+1} + \frac{1}{2}[\sqrt{x}]^\theta + \zeta(-\theta) + Bx^{\frac{\theta-1}{2}}\right)$$

$$= x \sum_{n \leqq \lfloor \bar{x} \rfloor} n^{\theta-1} - \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} n^{\theta} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} n^{\theta} + \frac{1}{\theta+1} \sum_{n \leqq \lfloor \sqrt{x} \rfloor} x^{\theta+1} n^{\theta+1} \left(1 - \frac{(\theta+1) R\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} + \frac{B n^2}{x^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} \frac{x^{\theta}}{n^{\theta}} \left(1 + \frac{B n}{x}\right) + \zeta(-\theta)\left[\sqrt{x}\right] + B x^{\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\theta+1} \left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta+2}$$

$$- \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta+1} - \zeta(-\theta)\left[\sqrt{x}\right] + B x^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= \left(x \frac{\left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta}}{\theta} + x \zeta(1-\theta) + \frac{x}{2 x^{\frac{1-\theta}{2}}} + B x^{\frac{\theta}{2}}\right) - \sum_{n \leqq \lfloor \bar{x} \rfloor} n^{\theta} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta+1}}{\theta+1} + \zeta(-\theta) + B x^{\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$+ \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \left(\zeta(1+\theta) - \frac{1}{\theta\left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta}} + \frac{1}{2\left(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})\right)^{\theta+1}} + B x^{-\frac{\theta}{2}-1}\right)$$

$$- \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{x^{\theta}}{n^{\theta}} \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2}\right) + B x^{\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{x^{\theta}}{n^{\theta}} + B x^{\frac{\theta}{2}} + \zeta(-\theta)\left[\sqrt{x}\right] + B x^{\frac{\theta}{2}}$$

$$- \frac{x^{\frac{\theta}{2}+1}}{\theta+1} + \frac{\theta+2}{\theta+1} x^{\frac{\theta+1}{2}} R(\sqrt{x}) + B x^{\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{\theta+1}{2}} + B x^{\frac{\theta}{2}} - \zeta(-\theta)\left[\sqrt{x}\right] + B x^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= x \zeta(1-\theta) + \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \zeta(1+\theta) + x^{1+\frac{\theta}{2}} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta(\theta+1)} - \frac{1}{\theta+1}\right)$$

$$+ x^{\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2}} \left(-R(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\theta+1)} - \frac{R(\sqrt{x})}{\theta+1} + \frac{1}{2(\theta+1)} + \frac{\theta+2}{\theta+1} R(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \sum_{n \leqq \lfloor \bar{x} \rfloor} n^{\theta} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - x^{\theta} \sum_{n \leqq \lfloor \bar{x} \rfloor} \frac{1}{n^{\theta}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2} \zeta(-\theta) + B x^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= x \zeta(1-\theta) + \frac{x^{1+\theta}}{1+\theta} \zeta(1+\theta) - \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} n^{\theta} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - x^{\theta} \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^{\theta}} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$- \frac{1}{2} \zeta(-\theta) + B x^{\frac{\theta}{2}}.$$

Lemma 16: *For* $-1 < \theta < 0$,

$$(65) \quad -R_{\theta}(x) = \sum_{n \leqq \lfloor \bar{x} \rfloor} n^{\theta} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + x^{\theta} \sum_{n \leqq \lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^{\theta}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} \zeta(-\theta) + B x^{\frac{\theta}{2}}.$$

Proof: $R_{\theta}(x)$ is, by definition, the non trivial part on the right hand side of (64).

Lemma 17: *For* $-1<\theta\leqq -\frac{1}{2}$,

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du = \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\int_c^x \psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du \tag{66}$$

$$+\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^\theta}\int_c^x u^{2\theta}\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+2\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{a}{b}\right)^\theta\int_c^x u^\theta\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du$$

$$+\frac{x}{4}\zeta^2(-\theta)+Bx^{\frac{3}{2}+\theta}$$

where

$$c=\mathrm{Max}(a^2;b^2). \tag{67}$$

Proof:

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du=\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\int_c^x\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du \tag{68}$$

$$+\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^\theta}\int_c^x u^{2\theta}\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+2\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{a}{b}\right)^\theta\int_c^x u^\theta\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du$$

$$+\frac{x}{4}\zeta^2(-\theta)+\zeta(-\theta)\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^\theta\int_{a^2}^x\psi\left(\frac{u}{a}\right)du$$

$$+\zeta(-\theta)\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{b^\theta}\int_{b^2}^x u^\theta\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+B\int_1^x u^{\frac{\theta}{2}}\sum_{n\leqq\sqrt{u}}n^\theta\,du$$

$$+B\int_1^x u^{\frac{3\theta}{2}}\sum_{n\leqq\sqrt{u}}\frac{1}{n^\theta}\,du+Bx^{1+\frac{\theta}{2}} \qquad (67).$$

$$\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^\theta\int_{a^2}^x\psi\left(\frac{u}{a}\right)du=\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^\theta\cdot a\int_a^{\frac{x}{a}}\psi(u)\,du$$

$$=B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}a^{1+\theta}=Bx^{1+\frac{\theta}{2}}$$

$$=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}, \tag{69}$$

since

$$-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}. \tag{70}$$

$$\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{b^\theta}\int_{b^2}^x u^\theta\psi\left(\frac{u}{b}\right)du=\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\int_b^{\frac{x}{b}}u^\theta\psi(u)\,du$$

$$=B\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^{1+\theta}=Bx^{1+\frac{\theta}{2}}$$

$$=Bx^{\frac{3}{2}+\theta} \tag{71}$$

(70).

$$\int_1^x u^{\frac{\theta}{2}} \sum_{n \leqq \sqrt{u}} n^\theta \, du = B \int_1^x u^{\frac{\theta}{2}} u^{\frac{1+\theta}{2}} \, du = B x^{\frac{3}{2}+\theta}. \tag{72}$$

$$\int_1^x u^{\frac{3\theta}{2}} \sum_{n \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{n^\theta} \, du = B \int_1^x u^{\frac{3\theta}{2}} u^{\frac{1-\theta}{2}} \, du = B x^{\frac{3}{2}+\theta}. \tag{73}$$

$$x^{1+\frac{\theta}{2}} = B x^{\frac{3}{2}+\theta} \tag{74}$$

(70).

(66) follows from (68), (69), (71), (72), (73), (74).

Lemma 18:

$$\sum_{\substack{a,b=1 \\ (a,b)=1}}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{1-\theta}} = \frac{\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)} \qquad \left(-1 < \theta \leqq -\frac{1}{2}\right). \tag{75}$$

Proof:

$$\zeta^2(1-\theta) = \sum_{a,b=1}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{1-\theta}} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2-2\theta}} \sum_{\substack{a,b=1 \\ (a,b)=1}}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{1-\theta}}$$

$$= \zeta(2-2\theta) \sum_{\substack{a,b=1 \\ (a,b)=1}}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{1-\theta}}.$$

Lemma 19: *For* $-1 < \theta < -\frac{1}{2}$,

$$I = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} (x-c)(ab)^\theta \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb=na}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{x}{12} \frac{\zeta(-2\theta)\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)} + B x^{\frac{3}{2}+\theta}; \tag{76}$$

for $\theta = -\frac{1}{2}$,

$$I = B x \log x. \tag{77}$$

Proof:

$$I = \frac{1}{12} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{(x-c)(a,b)^2}{(ab)^{1-\theta}} \tag{27}$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{a \leqq b \leqq \sqrt{x}} \frac{(x-b^2)(a,b)^2}{(ab)^{1-\theta}} + \frac{1}{12} \sum_{b \leqq a \leqq \sqrt{x}} \frac{(x-a^2)(a,b)^2}{(ab)^{1-\theta}} - \frac{1}{12} \sum_{a \leqq \sqrt{x}} (x-a^2) a^{2\theta}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{a \leqq b \leqq \sqrt{x}} \frac{(x-b^2)(a,b)^2}{(ab)^{1-\theta}} - \frac{1}{12} \sum_{a \leqq \sqrt{x}} (x-a^2) a^{2\theta}. \tag{78}$$

$$\frac{1}{12} \sum_{a \leqq \sqrt{x}} (x-a^2) a^{2\theta} = \frac{x}{12} \zeta(-2\theta) + B x \cdot x^{\frac{1+2\theta}{2}} + B x^{\frac{3+2\theta}{2}} \qquad \left(-1 < \theta < -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{x}{12} \zeta(-2\theta) + B x^{\frac{3}{2}+\theta} \qquad \left(-1 < \theta < -\frac{1}{2}\right). \tag{79}$$

$$\frac{1}{12}\sum_{a\leqq\sqrt{x}}(x-a^2)a^{2\theta}=Bx\log x \qquad \left(\theta=-\frac{1}{2}\right). \tag{80}$$

$$\sum_{a\leqq b\leqq\sqrt{x}}\frac{(x-b^2)(a,b)^2}{(ab)^{1-\theta}}=\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2\theta}\sum_{\substack{a\leqq b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}\\(a,b)=1}}\frac{x-b^2d^2}{(ab)^{1-\theta}}$$

$$=x\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2\theta}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}-\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+2\theta}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}b^{1+\theta}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}. \tag{81}$$

$$\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+2\theta}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}b^{1+\theta}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}=B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+2\theta}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}b^{1+\theta}$$

$$=B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+2\theta}\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right)^{2+\theta}=Bx^{1+\frac{\theta}{2}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{\theta}$$

$$=Bx^{\frac{3}{2}+\theta} \qquad \left(-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}\right). \tag{82}$$

$$\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2\theta}\sum_{b>\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}=B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2\theta}\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right)^{\theta}=Bx^{\frac{\theta}{2}}x^{\frac{1+\theta}{2}}$$

$$=Bx^{\frac{1}{2}+\theta} \qquad \left(-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}\right). \tag{83}$$

$$\sum_{d>\sqrt{x}}d^{2\theta}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}=B\sum_{d>\sqrt{x}}d^{2\theta}=Bx^{\frac{1+2\theta}{2}}$$

$$=Bx^{\frac{1}{2}+\theta} \qquad \left(-1<\theta<-\frac{1}{2}\right). \tag{84}$$

For $\theta=-\frac{1}{2}$,

$$x\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2\theta}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}=Bx\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d}=Bx\log x. \tag{85}$$

$$I=\frac{x}{6}\sum_{d=1}^{\infty}d^{2\theta}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}-\frac{x}{12}\zeta(-2\theta)-Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\quad\left(-1<\theta<-\frac{1}{2}\right) \tag{86}$$

(**78**, **79**, **81**, **82**, **83**, **84**).

$$2\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{1-\theta}}\sum_{\substack{a\leqq b\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}=\sum_{\substack{a,b=1\\(a,b)=1}}^{\infty}\frac{1}{(ab)^{1-\theta}}+\sum_{\substack{a,b=1\\(a,b)=1\\a=b}}^{\infty}\frac{1}{(ab)^{1-\theta}}$$

$$=\frac{\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)}+1 \tag{87}$$

(**75**).

(76) follows from (86) and (87). (77) follows from (78), (80), (81), (82), (85).

Lemma 20:

$$(88)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^{\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x\qquad\left(-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}\right).$$

$$(89)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^{\theta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\qquad\left(-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}\right).$$

Proof:

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^{\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|}=\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^{1+\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\,|mb-na|}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x\quad(34).$$

(89) is derived from (35) in the same way as (88) from (34).

Lemma 21: *When* $-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}$,

$$(90)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{ac}{b}\right)^{\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x,$$

$$(91)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{ac}{b}\right)^{\theta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta},$$

$$(92)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x,$$

$$(93)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\theta}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}.$$

Proof: Since

$$\left(\frac{ac}{b}\right)^{\theta}=\left(\frac{abc}{b^2}\right)^{\theta}\leqq(ab)^{\theta},$$

$$\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\theta}\leqq\left(\frac{a^2b^2}{ab}\right)^{\theta}=(ab)^{\theta},$$

the sums (90) and (92) are not greater than the left hand side of (88), and the sums (91) and (93) do not exceed the left hand side of (89).

Lemma 22: *When* $-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}$

$$(94)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\theta}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb=na}}^{\infty}\frac{1}{mn}\int_{c}^{x}u^{\theta}du=Bx^{\frac{3}{2}+\theta},$$

$$(95)\qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^{\theta}}\sum_{\substack{m,n=1\\ mb=na}}^{\infty}\frac{1}{mn}\int_{c}^{x}u^{2\theta}du=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x.$$

Proof of (94): The left side of (94) is equal to

$$B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\theta}x^{1+\theta}\frac{(a,b)^2}{ab}(27)=Bx^{1+\theta}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\sum_{b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{b^{1+\theta}}\sum_{\substack{a\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}\\(a,b)=1}}\frac{1}{a^{1-\theta}}$$

$$=Bx^{1+\theta}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{d^{\theta}}{x^{\frac{1}{2}\theta}}=Bx^{1+\frac{1}{2}\theta}x^{\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2}}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}.$$

Proof of (95): For $-1<\theta<-\frac{1}{2}$ the left side of (95) is equal to

$$B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^{\theta}}\frac{(a,b)^2}{ab}c^{1+2\theta}(27)=B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^{\theta}}\frac{(a,b)^2}{ab}a^{2(1+2\theta)}$$

$$=B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{d^{2+4\theta}}{d^{2\theta}}\sum_{\substack{a,b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}\\(a,b)=1}}\frac{a^{2+4\theta}}{(ab)^{1+\theta}}=B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+2\theta}\frac{d^{\theta}}{x^{\frac{\theta}{2}}}\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}a^{1+3\theta}$$

$$=\frac{B}{x^{\frac{\theta}{2}}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+3\theta}\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}a^{1+3\theta}. \tag{96}$$

In case $1+3\theta\leqq-1$, (96) is equal to

$$\frac{B\log x}{x^{\frac{\theta}{2}}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+3\theta}=\frac{B\log x}{x^{\frac{\theta}{2}}}x^{\frac{3}{2}+\frac{3\theta}{2}}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x. \tag{97}$$

When $1+3\theta>-1$, (96) is equal to

$$\frac{B}{x^{\frac{\theta}{2}}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d^{2+3\theta}\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right)^{2+3\theta}=\frac{B}{x^{\frac{\theta}{2}}}x^{\frac{1}{2}}x^{1+\frac{3}{2}\theta}=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}. \tag{98}$$

When $-1<\theta<-\frac{1}{2}$ we obtain (95) from (96), (97), (98).
When $\theta=-\frac{1}{2}$ the left side of (95) is equal to

$$B\log x\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{(a,b)^2}{\sqrt{ab}}(27)=B\log x\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d\sum_{\substack{a,b\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}\\(a,b)=1}}\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$=B\log x\sum_{d\leqq\sqrt{x}}d\frac{\sqrt{x}}{d}=Bx\log x=Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x.$$

Lemma 23: *When* $-1<\theta<-\frac{1}{2}$, $\theta=-\frac{1}{2}$,

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^{\theta}\int_{c}^{x}\psi'\left(\frac{u}{a}\right)\psi'\left(\frac{u}{b}\right)du=\frac{x}{12}\frac{\zeta(-2\theta)\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)}+Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x,\quad Bx\log x \tag{99}$$

Proof: The conditions of lemma 9 are fulfilled with[13])

$$\alpha = c, \quad \beta = x, \quad g(u) = \psi\left(\frac{u}{a}\right), \quad h(u) = \psi\left(\frac{u}{b}\right),$$

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\sin 2\pi\frac{m}{a}u, \qquad t_k(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\sin 2\pi\frac{n}{b}u.$$

Hence

$$\sum_{\sqrt{x}}(ab)^\theta\int_c^x\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du = \frac{1}{\pi^2}\lim_{k=\infty}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\sum_{m,n=1}^{k}\frac{1}{mn}\int_c^x\sin 2\pi\frac{m}{a}u\sin 2\pi\frac{n}{b}u\,du \quad (38)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\lim_{k=\infty}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\left(\sum_{\substack{m,n=1\\ mb=na}}^{k}\frac{1}{mn}\int_c^x du + \sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{k}\frac{1}{mn}\int_c^x\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)du\right.$$

$$\left. - \sum_{m,n=1}^{k}\frac{1}{mn}\int_c^x\cos 2\pi u\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)du\right)$$

$$= I + B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty}\frac{1}{mn\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|} + B\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}(ab)^\theta\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)} \qquad (76)$$

$$= \frac{x}{12}\frac{\zeta(-2\theta)\,\zeta^2(1-\theta)}{\zeta(2-2\theta)} + Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x,\ Bx\log x \qquad (76,\ 88,\ 89;\ 77,\ 88,\ 89)$$

when $-1<\theta<-\frac{1}{2}$ and $\theta=-\frac{1}{2}$ respectively.

Lemma 24: *For* $-1<\theta\leqq-\frac{1}{2}$,

$$(100) \qquad \sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^\theta}\int_c^x u^{2\theta}\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du = Bx^{\frac{3}{2}+\theta}\log x.$$

Proof: The conditions of lemma 9 are satisfied with[13])

$$\alpha = c, \quad \beta = x, \quad g(u) = u^\theta\psi\left(\frac{u}{a}\right), \quad h(u) = u^\theta\psi\left(\frac{u}{b}\right),$$

$$s_k(u) = -\frac{u^\theta}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\sin 2\pi\frac{m}{a}u, \qquad t_k(u) = -\frac{u^\theta}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\sin 2\pi\frac{n}{b}u.$$

Hence

$$\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^\theta}\int_c^x u^{2\theta}\psi\left(\frac{u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\lim_{k=\infty}\sum_{a,b\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{(ab)^\theta}\sum_{m,n=1}^{k}\frac{1}{mn}\int_c^x u^{2\theta}\sin 2\pi\frac{m}{a}u\sin 2\pi\frac{n}{b}u\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{(ab)^\theta} \left(\sum_{\substack{m,n=1 \\ mb=na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^{2\theta}\, du + \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb \neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^{2\theta} \cos 2\pi u \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) du \right.$$

$$\left. - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^{2\theta} \cos 2\pi u \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) du \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{(ab)^\theta} \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb=na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^{2\theta}\, du + B \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\theta \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb \neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn \left| \frac{m}{a} - \frac{n}{b} \right|^\theta}$$

$$+ B \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\theta \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right)^\theta}$$

$$= B x^{\frac{3}{2}+\theta} \log x \qquad (\mathbf{95}, \mathbf{92}, \mathbf{93}).$$

Lemma 25: *For* $-1 < \theta \leqq -\frac{1}{2}$,

$$\sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{a}{b}\right)^\theta \int_c^x u^\theta \psi'\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) du = B x^{\frac{3}{2}+\theta} \log x. \tag{101}$$

Proof: The conditions of lemma 9 are fulfilled with [13])

$$\alpha = c, \quad \beta = x, \quad g(u) = u^{\frac{1}{2}\theta} \psi\left(\frac{u}{a}\right), \quad h(u) = u^{\frac{1}{2}\theta} \psi\left(\frac{u}{b}\right),$$

$$s_k(u) = -\frac{u^{\frac{1}{2}\theta}}{\pi} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \sin 2\pi \frac{m}{a} u, \qquad t_k(u) = -\frac{u^{\frac{1}{2}\theta}}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sin 2\pi \frac{n}{b} u.$$

Hence

$$\sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{a}{b}\right)^\theta \int_c^x u^\theta \psi\left(\frac{u}{a}\right) \psi\left(\frac{u}{b}\right) du = \frac{1}{\pi^2} \lim_{k=\infty} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{a}{b}\right)^\theta \sum_{m,n=1}^{k} \frac{1}{mn} \int_c^x u^\theta \sin 2\pi \frac{m}{a} u \sin 2\pi \frac{n}{b} u$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{a}{b}\right)^\theta \left(\sum_{\substack{m,n=1 \\ mb=na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^\theta\, du + \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb \neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^\theta \sin 2\pi u \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) du \right.$$

$$\left. - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^\theta \cos 2\pi u \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) du \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{a}{b}\right)^\theta \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb=na}}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_c^x u^\theta\, du + B \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{ac}{b}\right)^\theta \sum_{\substack{m,n=1 \\ mb \neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn \left| \frac{m}{a} - \frac{n}{b} \right|^\theta}$$

$$+ B \sum_{a,b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{ac}{b}\right)^\theta \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right)^\theta}$$

$$= B x^{\frac{3}{2}+\theta} \log x \qquad (\mathbf{94}, \mathbf{90}, \mathbf{91}).$$

Proofs of (7) and (9): (66), (99), (100), (101).

§ 3.

Proofs of (8) and (10).

Throughout this section $\frac{1}{2} \leqq \theta < 1$.

Lemma 26[14]): *When* $\frac{1}{2} < \theta < 1$,

$$x^\theta \sum_{n \leqq x} \sigma_{-\theta}(n) - \sum_{n \leqq x} \sigma_\theta(n) = \sum_{s=-\theta,0,1-\theta,1} \text{Res.} \frac{\theta\, x^{s+\theta}}{s(s+\theta)} \zeta(s)\,\zeta(s+\theta) + B\, x^{\frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3}}. \tag{102}$$

Lemma 27: *When* $\frac{1}{2} < \theta < 1$,

$$R_\theta(x) = x^\theta R_{-\theta}(x) + \frac{1}{2} x^\theta \zeta(\theta) + B\, x^{\frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3}}. \tag{103}$$

Proof:

$$\sum_{n \leqq x} \sigma_\theta(n) = x^\theta \sum_{n \leqq x} \sigma_{-\theta}(n) - \frac{\theta\, x^{1+\theta}}{1+\theta} \zeta(1+\theta) - \frac{\theta\, x\, \zeta(1-\theta)}{1-\theta} - x^\theta \zeta(0)\,\zeta(\theta) + \zeta(-\theta)\,\zeta(0) + B\, x^{\frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3}} \tag{104}$$ (102)

$$= \frac{x^{1+\theta}}{1+\theta} \zeta(1+\theta) + x\,\zeta(1-\theta) + x^\theta R_{-\theta}(x) + \frac{1}{2} x^\theta \zeta(\theta) + B\, x^{\frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3}} \tag{105}$$ (64).

$$\sum_{s=1+\theta,1,0} \text{Res.} \frac{x^s}{s} \zeta(s)\,\zeta(s-\theta) = \frac{x^{1+\theta}}{1+\theta} \zeta(1+\theta) + x\,\zeta(1-\theta) + \zeta(0)\,\zeta(-\theta). \tag{106}$$

(103) follows from (105) and (106). The definition of $R_\theta(x)$ is, of course, a matter for choice. The above definition seems to "come out" naturally.

Lemma 28: *When* $\frac{1}{2} < \theta < 1$,

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du \sim \frac{1}{12} \frac{1}{(2\theta+1)} \frac{\zeta(2\theta)\,\zeta^2(1+\theta)}{\zeta(2+2\theta)} x^{1+2\theta}. \tag{107}$$

Proof: Write

$$\lambda = \frac{1}{2} \zeta(\theta). \tag{108}$$

Then

$$\int_1^x R_\theta^2(u)\,du = \int_1^x (u^\theta R_{-\theta}(u) + \lambda u^\theta)^2\,du + \int_1^x (R_\theta^2(u) - (u^\theta R_{-\theta}(u) + \lambda u^\theta)^2)\,du$$

$$= \int_1^x (u^{2\theta} R_{-\theta}^2(u) + \lambda^2 u^{2\theta} + 2\lambda u^{2\theta} R_{-\theta}(u))\,du + \int_1^x B\,|R_\theta(u) - u^\theta R_{-\theta}(u) - \lambda u^\theta|\,|R_\theta(u) + u^\theta R_{-\theta}(u) + \lambda u^\theta|\,du. \tag{109}$$

$$\int_1^x u^{2\theta} R_{-\theta}^2(u)\,du \sim \frac{1}{(2\theta+1)} x^{1+2\theta} \left(\frac{1}{4} \zeta^2(\theta) + \frac{1}{12} \frac{\zeta(2\theta)\,\zeta^2(1+\theta)}{\zeta(2+2\theta)} \right) \tag{110}$$ (7).

[14]) E. Landau, „Über einige zahlentheoretische Funktionen", Göttinger Nachrichten 1924, S. 116–134. Proof in § 1.

$$\int_1^x u^{2\theta} R_{-\theta}(u)\,du = -\frac{x^{1+2\theta}}{2(1+2\theta)}\zeta(\theta) - \sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n^\theta}\int_{n^2}^x u^{2\theta}\psi\left(\frac{u}{n}\right)du$$

$$- \sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^\theta \int_{n^2}^x u^\theta \psi\left(\frac{u}{n}\right)du + B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta} \quad (65)$$

$$= -\frac{x^{1+2\theta}}{2(1+2\theta)}\zeta(\theta) - \sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{n^{1+2\theta}}{n^\theta}\int_n^x u^{2\theta}\psi(u)\,du - \sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^{1+2\theta}\int_n^x u^\theta\psi(u)\,du$$

$$+ B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta}$$

$$= -\frac{x^{1+2\theta}}{2(1+2\theta)}\zeta(\theta) + B\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^{1-\theta}x^{2\theta} + B\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^{1+\theta}x^\theta + B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta}$$

$$= -\frac{x^{1+2\theta}}{2(1+2\theta)}\zeta(\theta) + B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta} + B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta} + B\,x^{1+\frac{3}{2}\theta}$$

$$(111)\quad \sim -\frac{x^{1+2\theta}}{2(1+2\theta)}\zeta(\theta).$$

$$(112)\qquad R_{-\theta}(u) = B\,u^{\frac{1-\theta}{2}}\ (u\geqq 1) \qquad (65).$$

$$(113)\qquad R_\theta(u) = B\,u^{\frac{1+\theta}{2}} \qquad (103, 112).$$

$$(114)\qquad R_\theta(u) - u^\theta R_{-\theta}(u) - \lambda u^\theta = B\,u^{\frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3}} \qquad (103, 108).$$

$$(115)\qquad R_\theta(u) + u^\theta R_{-\theta}(u) + \lambda u^\theta = B\,u^{\frac{1+\theta}{2}} \qquad (112, 113).$$

$$(116)\quad \int_1^x \left|R_\theta(u) - u^\theta R_{-\theta}(u) - \lambda u^\theta\right|\left|R_\theta(u) + u^\theta R_{-\theta}(u) + \lambda u^\theta\right|du = B\,x^m,$$

where

$$(117)\qquad m = 1 + \frac{1+\theta}{2} + \frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3} \qquad (114, 115).$$

Now

$$(118)\qquad m = \frac{3+\theta}{2} + \frac{(2\theta-1)(\theta+1)}{2\theta+3} < 1 + 2\theta,$$

if,

$$(3+\theta)(2\theta+3) + 2(2\theta-1)(\theta+1) < 2(2\theta+3)(1+2\theta)$$

or,

$$2(2\theta-1)(\theta+1) < (2\theta+3)(3\theta-1)$$

or,

$$2\theta^2 + 5\theta - 1 > 0 \quad \left(\frac{1}{2} < \theta < 1\right)$$

which, one can see at once, is true. Further,

$$(119)\qquad \int_1^x \lambda^2 u^{2\theta}\,du = \frac{1}{4}\,\frac{\zeta^2(\theta)}{1+2\theta}\,x^{1+2\theta} + B \qquad (108).$$

(107) follows from (109), (110), (111), (116), (118), (119).

Lemma 29:

$$\int_1^x R_{\frac{1}{2}}^2(u)\,du = B\,x^2 \log x \qquad (120)$$ **(10).**

Proof: Ramanujan[15]) has shown that

$$\sum_{n \leqq x} \sigma_{\frac{1}{2}}(n) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n \leqq x} \sigma_{-\frac{1}{2}}(n) - \frac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\,\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\,\zeta\left(\tfrac{1}{2}\right) - x\,\zeta\left(\tfrac{1}{2}\right) + B\,x^{\frac{1}{4}}. \qquad (121)$$

This is exactly the same as the case $\theta = \frac{1}{2}$ of equation (104), except that the error term is larger — $B\,x^{\frac{1}{4}}$ instead of B. Hence,

$$R_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} R_{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2}\,\sqrt{x}\,\zeta\left(\tfrac{1}{2}\right) + B\,x^{\frac{1}{4}} \qquad (122) \quad \textbf{(64, 121)}$$

$$\int_1^x R_{\frac{1}{2}}^2(u)\,du = \int_1^x u\,R_{-\frac{1}{2}}^2(u)\,du + \frac{1}{4}\,\zeta^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + B\,x^{\frac{7}{4}} + \int_1^x \zeta\left(\tfrac{1}{2}\right) u\,R_{-\frac{1}{2}}(u)\,du + B\int_1^x u^{\frac{3}{4}}\,|R_{-\frac{1}{2}}(u)|\,du \qquad (123)$$ **(122).**

$$\int_1^x u\,R_{-\frac{1}{2}}^2(u)\,du = B\,x^2 \log x \qquad (124) \quad \textbf{(66, 99, 100, 101).}$$

$$\int_1^x u\,|R_{-\frac{1}{2}}(u)|\,du = B\,x^2 \log^{\frac{1}{2}} x \qquad (125) \quad \textbf{(9).}$$

$$\int_1^x u^{\frac{3}{4}}\,|R_{-\frac{1}{2}}(u)|\,du = B\,x^{\frac{7}{4}} \log^{\frac{1}{2}} x \qquad (126) \quad \textbf{(9).}$$

(120) follows from (123), (124), (125), (126).

Paris, 20. July 1931.

(Eingegangen am 3. August 1931.)

[15]) This is the case $s = \frac{1}{2}$ of equation (17.5) of his paper "On certain trigonometrical sums", Trans. Camb. Phil. Soc., 22, No. 13 (1918), p. 259–276. See "Collected Papers", p. 198.

Über Algebren, die mit der Komplexgruppe in Zusammenhang stehen, und ihre Darstellungen.

Von

Hermann Weyl in Göttingen.

§ 1.

Das Problem. Gang der Untersuchung.

Eine beliebige Koordinatentransformation im n-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{R}$ mit den Koordinaten x_i:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a(ik)\, x_k \qquad [\det. a(ik) \neq 0] \tag{1}$$

induziert in der linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_f$ aller Tensoren f-ter Stufe $F(i_1 i_2 \cdots i_f)$ die Substitution

$$F'(i_1 i_2 \cdots i_f) = \sum_{(k)} a(i_1 k_1)\, a(i_2 k_2) \cdots a(i_f k_f) \cdot F(k_1 k_2 \cdots k_f). \tag{2}$$

Jedes der f Argumente i nimmt die Werte $1, 2, \cdots, n$ an. Durchläuft (1) eine Gruppe Γ, so (2) eine dazu isomorphe Gruppe Γ_f. Bei der Frage nach der Zerlegung des Tensorraumes $\mathfrak{R}_f$ in irreduzible invariante Bestandteile gegenüber Γ_f ersetzt man Γ_f zweckmäßig durch die „*einhüllende Algebra*“ Σ, zu der eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}_f$ auf sich selbst gerechnet wird, wenn sie sich linear mit beliebigen Zahlkoeffizienten aus Substitutionen kombinieren läßt, die zu Γ_f gehören.

Wenn Γ die Gruppe *aller* linearen Transformationen (1) mit einer von 0 verschiedenen Determinante ist, besteht Σ — das ist eine nahezu triviale Bemerkung — aus allen *symmetrischen* linearen Substitutionen des Tensorraums

$$A\colon\ F'(i_1 i_2 \cdots i_f) = \sum_{(k)} a(i_1 i_2 \cdots i_f;\ k_1 k_2 \cdots k_f) \cdot F(k_1 k_2 \cdots k_f). \tag{3}$$

„Symmetrisch“ heißt:

(I) $a(i_1 i_2 \cdots i_f;\ k_1 k_2 \cdots k_f)$ *ändert sich nicht, wenn die Indizes* $1, 2, \cdots, f$ *irgendeiner Permutation* $\boldsymbol{s}$ *unterworfen werden,*

oder, was auf dasselbe hinauskommt: dieselbe Substitution A, die F in F' überführt, verwandelt $s\,F$ in $s\,F'$. Die Darstellungstheorie der Algebra Σ aller symmetrischen Transformationen in $\mathfrak{R}_f$ läßt sich aber ganz elementar behandeln, wie ich in den Annals of Mathematics **30** (1929), S. 499, ausführlicher und vollständiger in der 2. Auflage des Buches „Gruppentheorie und Quantenmechanik" (Hirzel, 1931; zitiert als GQ) gezeigt habe. Der Gedanke, die Gruppe Γ_f durch die Algebra Σ zu ersetzen, war mir durch die Quantenmechanik nahegelegt worden. Denn sie interessiert sich eigentlich für Σ und nicht für Γ_f, da der Energieoperator in einem aus f Elektronen bestehenden Gebilde eine symmetrische Transformation in unserem Sinne ist.

Man wird versuchen, diese elementare Methode auf die orthogonale und die Komplexgruppe zu übertragen. Die *Komplexgruppe* soll hier ausführlich behandelt werden, auf die schwierigere Sachlage bei der orthogonalen Gruppe werde ich nur in einer Schlußbemerkung eingehen. Die gerade Dimensionszahl des zugrunde liegenden Vektorraumes $\mathfrak{R}$ mit den Koordinaten $x_1, x_{1'}, \cdots, x_n, x_{n'}$ werde jetzt $2n$ genannt, und Γ bestehe aus allen Transformationen (1), welche das schiefe Produkt $[x\,y]$ zweier Vektoren x, y in $\mathfrak{R}$:

$$[x\,y] = (x_1 y_{1'} - x_{1'} y_1) + (x_2 y_{2'} - x_{2'} y_2) + \cdots + (x_n y_{n'} - x_{n'} y_n)$$
$$= \sum_{i,k} \varepsilon(i\,k)\, x_i y_k$$

ungeändert lassen. Jedes Tensorargument i durchläuft die Werte $1, 1', 2, 2', \cdots, n, n'$. Eine gegenüber Γ invariante Operation ist die Bildung der *„Spur" eines Tensors* $F(i_1 i_2 \cdots i_f)$ in bezug auf die ersten beiden Argumente, wodurch ein Tensor $\varphi_{12}(i_3 \cdots i_f)$ der Stufe $f-2$ entsteht:

$$\varphi_{12}(i_3 \cdots i_f) = \sum_{i_1, i_2} \varepsilon(i_1 i_2)\, F(i_1 i_2 i_3 \cdots i_f) = \sum_r \pm F(r\,r'\,i_3 \cdots i_f) = F(\times\times i_3 \cdots i_f).$$

Die Spurbildung kann mit Bezug auf irgendein Argumentpaar ausgeführt werden. Mit $\mathfrak{R}_f^*$ wird die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Tensoren f-ter Stufe bezeichnet, deren sämtliche $\frac{f(f-1)}{2}$ Spuren verschwinden; sie ist invariant gegenüber allen Permutationen s der Argumente wie auch gegenüber der Gruppe Γ_f. Wird in (2) für einen Augenblick

$$a(i_1 k_1)\, a(i_2 k_2) \cdots a(i_f k_f) = a(i_1 i_2 \cdots i_f;\ k_1 k_2 \cdots k_f),$$
$$a(i_3 k_3) \cdots a(i_f k_f) = a(i_3 \cdots i_f;\ k_3 \cdots k_f),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gesetzt, so gelten, als Folge der für eine Komplextransformation (1) gültigen Beziehungen

$$\sum_r \pm a(r\,i)\, a(r'\,k) = \varepsilon(i\,k), \qquad \sum_r \pm a(i\,r)\, a(k\,r') = \varepsilon(i\,k),$$

außer der Symmetriebedingung (I) *die Gleichungen* (II):

$$(f)\begin{cases}\sum\limits_r \pm a(r\,r'\,i_3\cdots i_f;\ k_1\,k_2\,k_3\cdots k_f) = \varepsilon(k_1k_2)\cdot a(i_3\cdots i_f;\ k_3\cdots k_f),\\ \sum\limits_r \pm a(i_1\,i_2\,i_3\cdots i_f;\ r\,r'\,k_3\cdots k_f) = \varepsilon(i_1i_2)\cdot a(i_3\cdots i_f;\ k_3\cdots k_f);\end{cases}$$

$$(f-2)\begin{cases}\sum\limits_r \pm a(r\,r'\,i_5\cdots i_f;\ k_3\,k_4\cdots k_f) = \varepsilon(k_3k_4)\cdot a(i_5\cdots i_f;\ k_5\cdots k_f),\\ \sum\limits_r \pm a(i_3\,i_4\cdots i_f;\ r\,r'\,k_5\cdots k_f) = \varepsilon(i_3i_4)\cdot a(i_5\cdots i_f;\ k_5\cdots k_f);\end{cases}$$

. . . . . .

Es liegen nun die folgenden Vermutungen nahe:

Satz 1.1. *Die einhüllende Algebra der im Raume* $\mathfrak{R}_f^*$ *wirkenden Gruppe* Γ_f *ist die Totalität* Σ^* *aller symmetrischen linearen Substitutionen in* $\mathfrak{R}_f^*$. — Eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst: $F \to F'$ heißt symmetrisch, wenn sie zugleich den Tensor $\mathfrak{s}F$ in $\mathfrak{s}F'$ überführt (unter $\mathfrak{s}$ jede mögliche Permutation der f Argumente verstanden).

Satz 1.2. *Die einhüllende Algebra der im Raume* $\mathfrak{R}_f$ *wirkenden Gruppe* Γ_f *ist die Totalität* Σ *derjenigen linearen Substitutionen* (3), *deren Koeffizienten den oben aufgezählten Bedingungen* (I) *und* (II) *genügen.* Durch (II) wird mit der f-dimensionalen symmetrischen Abbildung $A = A_f$ eine symmetrische Abbildung A_{f-2} in $f-2$ Dimensionen verbunden, mit dieser wiederum eine symmetrische A_{f-4} usf. bis hinunter zu A_0 oder A_1.

In § 2 und § 3 wird mit den einfachsten Hilfsmitteln die Darstellungstheorie der Algebra Σ^* bzw. Σ entwickelt werden. Dabei kann $\mathfrak{R}_f^*$ in § 2 sogar eine beliebige lineare Tensormannigfaltigkeit sein, welche gegenüber den sämtlichen Permutationen $\mathfrak{s}$ invariant ist. In § 4 werden die Youngschen Symmetrieoperatoren eingeführt. Nur Symmetrieschemata von höchstens n Zeilen kommen in Frage, weil ein schiefsymmetrischer Tensor $F(i_1 i_2 \cdots i_f)$, dessen Stufe f die halbe Dimensionszahl n übersteigt, verschwindet, wenn alle seine Spuren $= 0$ sind. Die beiden Sätze 1.1 und 1.2 kann ich vorläufig nicht so direkt ableiten wie den entsprechenden „trivialen“ Sachverhalt im Gebiete der vollen linearen Gruppe. Vielmehr geschieht das in § 5 durch Vergleich der Ergebnisse von §§ 2 bis 4 mit den von anders her bekannten irreduziblen Darstellungen der Komplexgruppe. § 6 enthält einige Schlußbemerkungen, insbesondere über die orthogonale Gruppe.

Als Zahlbereich liegt zugrunde das Kontinuum der gemeinen komplexen Zahlen. Ich werde aber, um der abstrakten Algebra die schuldige Reverenz zu erweisen, jedesmal bemerken, in welchem weiteren Umfange die Resultate und Beweise Gültigkeit haben.

§ 2.

Zerlegung von $\mathfrak{R}_f^*$ in bezug auf seine symmetrischen Transformationen.

In diesem Paragraphen bedeute $\mathfrak{R}_f^*$ eine lineare Mannigfaltigkeit von Tensoren f-ter Stufe (einen „Teilraum" von $\mathfrak{R}_f$), die invariant ist gegenüber allen Permutationen $\boldsymbol{s}$; und Σ^* die Algebra aller symmetrischen linearen Abbildungen von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst. *Dann gilt wörtlich die ganze Theorie, wie ich sie in* GQ, Kap. V, §§ 2 und 4 *für den vollen Tensorraum* $\mathfrak{R}_f$ *entwickelt habe*[1]). $\mathfrak{r}$ bedeute wie dort den $f!$-dimensionalen Vektorraum aller Symmetriegrößen

$$\boldsymbol{x} = \sum_s x(s) \cdot \boldsymbol{s}.$$

In $\mathfrak{R}_f^*$ beziehen sich die Ausdrücke *invariant, irreduzibel, äquivalent* immer auf die Algebra Σ^*, in $\mathfrak{r}$ auf die Gesamtheit der allen möglichen Symmetriegrößen $\boldsymbol{a}$ korrespondierenden Abbildungen

$$(4) \qquad (a): \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x}.$$

Jeder lineare Teilraum $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{r}$ definiert einen invarianten Teilraum $\mathfrak{P} = \natural\,\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_f^*$, eine „Symmetrieklasse": der Tensor F aus $\mathfrak{R}_f^*$ gehört zu $\mathfrak{P}$, wenn die durch

$$x(s) = \boldsymbol{s}\,F(i_1, i_2, \cdots, i_f)$$

erklärte Symmetriegröße $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(i_1 i_2 \cdots i_f)$ für alle Werte von $i_1, i_2, \cdots, i_f$ in $\mathfrak{p}$ liegt. Ist umgekehrt $\mathfrak{P}$ irgendein Teilraum von $\mathfrak{R}_f^*$, so sei $\mathfrak{p} = \natural\,\mathfrak{P}$ der kleinste Teilraum von $\mathfrak{r}$, welcher alle Symmetriegrößen $\boldsymbol{F}(i_1 \cdots i_f)$ enthält, die man bekommt, wenn F die sämtlichen Tensoren von $\mathfrak{P}$, $(i_1 \cdots i_f)$ aber alle möglichen $(2n)^f$ Wertekombinationen durchläuft. Bilden die Tensoren $E_\alpha(i_1 \cdots i_f)$ eine Basis von $\mathfrak{P}$, so besteht $\natural\,\mathfrak{P}$ aus allen Symmetriegrößen von der Form

$$\boldsymbol{x} = \sum_\alpha \sum_{(i)} c_\alpha(i_1 \cdots i_f) \cdot \boldsymbol{E}_\alpha(i_1 \cdots i_f).$$

---

[1]) An diesem Vorgehen halte ich gegenüber der von Herrn v. d. Waerden, Math. Annalen **104** (1931), S. 92 vorgeschlagenen Methode doch fest, wegen seines mehr elementaren und direkten Charakters; auch führt es insofern zu vollständigeren Resultaten, als es nicht nur die Darstellungen der linearen und der Permutationsgruppe, sondern die invarianten Teilräume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ selbst (reduzible und irreduzible, äquivalente und inäquivalente) in Korrespondenz zueinander bringt. Wenn das v. d. Waerdensche Verfahren — wie er selbst in einem Zusatz a. a. O., S. 800, bemerkt — nichts anderes ist als der durch Einführung der einhüllenden Algebra an Stelle der Gruppe etwas vereinfachte Beweisgang, den Herr I. Schur in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1927, S. 58, darlegte, so steht meine „direkte" Methode in enger Beziehung zu Herrn Schurs Dissertation aus dem Jahre 1901, in welcher zum ersten Male die Korrespondenz zwischen der vollen linearen Gruppe und der symmetrischen Permutationsgruppe aufgedeckt wurde.

Insbesondere werde $\natural \mathfrak{R}_f^* = \mathfrak{r}^*$ gesetzt ($\mathfrak{r}_0$ a. a. O.). (Dieses $\mathfrak{r}^*$ ist invariant nicht nur gegenüber den Abbildungen (4), sondern auch gegenüber $x \to x' = xa$.) *Zwischen den invarianten Teilräumen* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{r}^*$ *und* $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{R}_f^*$ *besteht* — vermöge der Prozesse $\sharp$, $\natural$, die Umkehrungen voneinander sind — *eine eineindeutige Korrespondenz, die so konservativ ist wie nur möglich: Irreduzibilität, Dekomposition, Äquivalenz und Inäquivalenz auf der einen Seite implizieren dasselbe auf der andern.*

Wenn $\mathfrak{p}$ (ohne oder mit Index) ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{r}$ ist und $\mathfrak{P}$ jedesmal den zugehörigen invarianten Teilraum $\sharp\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_f^*$ bedeutet, so gilt nämlich:

Satz 2.1. *Wenn* $\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}$ *oder* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ *ist, so ist auch* $\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}$ *bzw.* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$.

Satz 2.2. *Die Äquivalenz* $\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p}_2$ *hat* $\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2$ *zur Folge.*

Satz 2.3. *Unter der Voraussetzung* $\mathfrak{p} < \mathfrak{r}^*$ *ist* $\mathfrak{p} = \natural\mathfrak{P}$.

In den Umkehrungen bedeute $\mathfrak{P}$ (ohne oder mit Index) irgendeinen invarianten Teilraum von $\mathfrak{R}_f^*$ und $\mathfrak{p}$ das zugehörige $\natural\mathfrak{P}$.

Satz 2.4. *Wenn* $\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}$ *oder* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$, *so ist* $\mathfrak{p}' < \mathfrak{p}$, *bzw.* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$.

Satz 2.5. *Aus* $\mathfrak{P}' \sim \mathfrak{P}$ *folgt* $\mathfrak{p}' \sim \mathfrak{p}$.

Satz 2.6. $\mathfrak{P} = \sharp\mathfrak{p}$.

Die volle Reduzibilität von $\mathfrak{r}$ zieht daher die gleiche Eigenschaft von $\mathfrak{R}_f^*$ nach sich:

Satz 2.7. *Jeder invariante Teilraum* $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{R}_f^*$, *insbesondere* $\mathfrak{R}_f^*$ *selbst, läßt sich in irreduzible invariante Teilräume zerlegen.*

Hat man innerhalb der Algebra der Symmetriegrößen die $\mathbf{1}$ in eine Summe unabhängiger primitiver idempotenter Größen zerlegt:

$$\mathbf{1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_l = \sum_\lambda e_\lambda ,$$

so liefert die auf einen willkürlichen Tensor F von $\mathfrak{R}_f^*$ angewendete Gleichung

$$F = \sum_\lambda (e_\lambda F)$$

eine Zerlegung des Tensorraumes $\mathfrak{R}_f^*$ in unabhängige *irreduzible* invariante Teilräume $\mathfrak{P}_\lambda$.

Analog zu Satz (6.3) in GQ, S. 273, kann man hinzufügen:

Satz 2.8. *Jede Darstellung von* Σ^* *zerfällt in irreduzible. Jede irreduzible Darstellung von* Σ^* *ist äquivalent mit der von* Σ^* *selbst in einem der invarianten Teilräume* $\mathfrak{P}_\lambda$ *induzierten Darstellung* $A \to A_\lambda$.

In dem Beweise der Sätze 2.5 und 2.6 erscheinen die benötigten symmetrischen Abbildungen in der Gestalt

$$a(i_1 \cdots i_f; k_1 \cdots k_f) = \sum_s s F(i_1 \cdots i_f) \cdot s \Phi(k_1 \cdots k_f),$$

wobei F Tensoren aus $\mathfrak{R}_f^*$ sind. Daraus geht hervor, daß man die symmetrischen Abbildungen von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst in der Form (3) schreiben kann, so daß die Koeffizienten a außer der Bedingung (I) noch der Forderung verschwindender Spur in bezug auf i genügen:

$$\sum_r \pm a(r r' i_3 \cdots i_f; k_1 k_2 k_3 \cdots k_f) = 0.$$

Dies ist aber nicht weiter verwunderlich. Denn $\mathfrak{R}_f$ läßt sich in $\mathfrak{R}_f^* + \mathfrak{R}_f^0$ so zerlegen, daß auch $\mathfrak{R}_f^0$ der Permutationsgruppe gegenüber invariant ist. Erweitert man die vorliegende symmetrische lineare Abbildung A von $\mathfrak{R}_f^*$ durch die Festsetzung auf ganz $\mathfrak{R}_f$, daß jeder in $\mathfrak{R}_f^0$ gelegene Tensor in 0 übergehen soll, so erhält man eine symmetrische Abbildung A von $\mathfrak{R}_f$ auf $\mathfrak{R}_f^*$. Diese stellt sich in der Form (3) mit symmetrischen Koeffizienten a dar, die in bezug auf i verschwindende Spur besitzen. Der Zerlegung $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_f^* + \mathfrak{R}_f^0$ entspricht im dualen Tensorraum eine Zerlegung $\mathsf{P}_f = \mathsf{P}_f^* + \mathsf{P}_f^0$, wobei $\Phi(k_1 \cdots k_f)$ zu P_f^* gehört, wenn es in bezug auf alle in $\mathfrak{R}_f^0$ gelegenen Tensoren $F^0(k_1 \cdots k_f)$ der Gleichung

$$\sum_{(k)} \Phi(k_1 \cdots k_f) \cdot F^0(k_1 \cdots k_f) = 0$$

genügt. Bei unserer Festsetzung wird $a(i_1 \cdots i_f; k_1 \cdots k_f)$ als Tensor der Argumente i dem Teilraum $\mathfrak{R}_f^*$ angehören (identisch in den k), als Tensor der Argumente k aber dem Teilraum P_f^* (identisch in den i), und vermöge dieser zusätzlichen Forderung bestimmt die gegebene symmetrische Abbildung von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst *eindeutig* die Koeffizienten a.

Die Überlegungen dieses Paragraphen erfordern nur, daß der zugrunde liegende Zahlbereich ein (kommutativer) *Körper ist, in welchem $f!$ nicht annulliert* (der keine Primzahl $\leqq f$ zur Charakteristik hat).

§ 3.

Zerlegung von $\mathfrak{R}_f$ in bezug auf die Algebra Σ.

Im Tensorraum $\mathfrak{R}_f$ führen wir eine *unitäre Maßbestimmung* ein, indem wir

$$\sum_{(i)} \bar{F}(i_1 \cdots i_f) \cdot G(i_1 \cdots i_f) = (F, G)$$

als das skalare Produkt der Tensoren F und G benutzen. Insbesondere heißen F und G senkrecht aufeinander, wenn $(F, G) = 0$ ist.

$\mathfrak{R}_f$ zerfällt in einer gegenüber der Permutationsgruppe invarianten Weise in $\mathfrak{R}_f^*$ und den zu $\mathfrak{R}_f^*$ senkrechten Teilraum $\mathfrak{R}_f^0$. Benutzen wir

diese Zerlegung gemäß der Schlußbemerkung von § 2 für die Normierung der Koeffizienten a, welche eine symmetrische Abbildung von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst darstellen, so finden wir:

Satz 3.1. *Jede symmetrische lineare Abbildung von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Gestalt* (3) *schreiben, so daß die symmetrischen Koeffizienten $a(i_1 \cdots i_f; k_1 \cdots k_f)$ sowohl in bezug auf i wie in bezug auf k die Spur* 0 *ergeben*:

$$a(\times\times i_3 \cdots i_f; k_1 k_2 \cdots k_f) = 0, \quad a(i_1 i_2 \cdots i_f; \times\times k_3 \cdots k_f) = 0.$$

Man wird vermuten, daß $\mathfrak{R}_f^0$ besteht aus allen Tensoren $\hat{F}(i_1 i_2 \cdots i_f)$ von der Form

$$\varepsilon(i_1 i_2) \cdot F_{12}(i_3 \cdots i_f) + \cdots; \tag{5}$$

die Summe erstreckt sich hier über $\frac{f(f-1)}{2}$ Glieder, die dadurch aus dem hingeschriebenen entstehen, daß ein beliebiges Indexpaar $(\alpha\,\beta)$ an Stelle von (12) tritt. Um dies zu beweisen, bezeichne $\hat{\mathfrak{R}}_f$ die lineare Mannigfaltigkeit aller Tensoren von dieser besonderen Gestalt. Ein Tensor $G(i_1 \cdots i_f)$, der zu ihnen allen senkrecht ist, genügt der Bedingung

$$\sum_{(i)} G(i_1 i_2 i_3 \cdots i_f) \cdot \varepsilon(i_1 i_2)\, \overline{F}_{12}(i_3 \cdots i_f) = 0$$

und den analogen mit $(\alpha\,\beta)$ an Stelle von (12). Darin durchläuft $F_{12}(i_3 \cdots i_f)$ alle Tensoren vom Range $f-2$. Mit andern Worten: G hat seine sämtlichen $\frac{f(f-1)}{2}$ Spuren $= 0$ oder liegt in $\mathfrak{R}_f^*$. $\mathfrak{R}_f^*$ ist also der zu $\hat{\mathfrak{R}}_f$ senkrechte Tensorraum. Wir haben daher den

Satz 3.2. *Jeder Tensor F läßt sich eindeutig zerlegen in einen Summanden F^*, dessen Spuren $= 0$ sind, und einen Tensor $\hat{F}$ von der Form* (5).

Dies heißt natürlich nicht, daß die in (5) auftretenden Tensoren $F_{12}(i_3 \cdots i_f), \cdots$ vom Range $f-2$ eindeutig durch F bestimmt sind. Es besteht aber die Tatsache, daß ein Tensor $\hat{F}$, (5), sicher dann $= 0$ ist, wenn alle seine Spuren verschwinden.

Wiederholen wir den gleichen Zerlegungsprozeß an den Tensoren $F_{12}, \cdots$ vom Range $f-2$ usf., so kommen wir zu dem Ergebnis, daß sich jeder Tensor F aus Summanden zusammensetzen läßt von der Gestalt

$$\varepsilon(i_{\alpha_1} i_{\alpha_{1'}}) \cdots \varepsilon(i_{\alpha_r} i_{\alpha_{r'}}) \cdot \varphi(i_{\beta_1} \cdots i_{\beta_v}) \qquad [2r + v = f], \tag{6}$$

worin der Tensor $\varphi(i_1 \cdots i_v)$ vom Range v dem Raume $\mathfrak{R}_v^*$ angehört, d. h. alle seine Spuren $= 0$ hat. ($\alpha_1, \alpha_{1'}; \cdots; \alpha_r, \alpha_{r'}; \beta_1, \cdots, \beta_v$ sind die Indizes $1, 2, \cdots, f$ in irgendeiner Reihenfolge.)

Die Zerlegung $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_f^* + \mathring{\mathfrak{R}}_f$ ist für uns darum von großer Wichtigkeit, weil $\mathfrak{R}_f^*$ sowohl wie $\mathring{\mathfrak{R}}_f$ invariant ist gegenüber der Algebra Σ. Denn wegen der ersten Gleichung (f) im System (II) geht die Spur des Tensors F', (3)

$$\varphi'(i_3 \cdots i_f) = F'(\times\times i_3 \cdots i_f)$$

aus der entsprechenden Spur $\varphi(i_3 \cdots i_f)$ von F durch die Substitution A_{f-2} mit den Koeffizienten

$$\|a(i_3 \cdots i_f; k_3 \cdots k_f)\| \tag{7}$$

hervor. Wegen der zweiten Gleichung (f) aber verwandelt unsere zu Σ gehörige Substitution $A = A_f$, (3), den Tensor

$$\varepsilon(i_1 i_2) \cdot F_{12}(i_3 \cdots i_f) \quad \text{in} \quad \varepsilon(i_1 i_2) \cdot F'_{12}(i_3 \cdots i_f),$$

wo F'_{12} aus F_{12} durch die gleiche Substitution A_{f-2}, (7), entsteht. Innerhalb $\mathfrak{R}_f^*$ ist A natürlich eine symmetrische Abbildung. Umgekehrt lehrt der Satz 3.1, daß sich jede symmetrische lineare Abbildung A^* von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst zu einer der Algebra Σ angehörigen Abbildung A von $\mathfrak{R}_f$ erweitern läßt; so daß innerhalb $\mathfrak{R}_f^*$ die Algebren Σ und Σ^* zusammenfallen. Aber die abschließende Auskunft hierüber liefert erst der den Satz 3.1 mitenthaltende

Satz 3.3. *Ist A^* eine gegebene symmetrische lineare Abbildung von $\mathfrak{R}_f^*$ auf sich selbst und*

$$A_{f-2} = \|a(i_3 \cdots i_f; k_3 \cdots k_f)\|$$

eine der Algebra Σ_{f-2} zugehörige Abbildung des Tensorraumes $\mathfrak{R}_{f-2}$, so gibt es eine und nur eine zu $\Sigma = \Sigma_f$ gehörige Abbildung

$$A = A_f = \|a(i_1 i_2 \cdots i_f; k_1 k_2 \cdots k_f)\|$$

von $\mathfrak{R}_f$, die 1. *innerhalb $\mathfrak{R}_f^*$ mit A^* zusammenfällt und* 2. *den Gleichungen (f) des Systems* (II) *mit dem vorgegebenen A_{f-2} genügt.*

Beweis. Es ist klar, wie man das gesuchte A zu konstruieren hat: man zerlegt jeden Tensor F in die beiden Bestandteile $F^* + \mathring{F}$, transformiert F^* gemäß dem gegebenen A^* und läßt den Tensor $\mathring{F}$, (5), in einen von der gleichen Gestalt

$$\mathring{F}' = \varepsilon(i_1 i_2) \cdot F'_{12}(i_3 \cdots i_f) + \cdots \tag{5'}$$

dadurch übergehen, daß man jeden der $\frac{f(f-1)}{2}$ Tensoren $F_{12}, \cdots$ vom Range $f-2$, die in dieser Summe auftreten, mittels des gegebenen A_{f-2} in $F'_{12}, \cdots$ transformiert. Das geht freilich nur, *wenn das Verschwinden von* (5) *das Verschwinden von* (5′) *zur Folge hat.* Hier liegt der springende Punkt des Beweises.

$\hat{F}'$ ist $= 0$, wenn alle seine Spuren verschwinden. Wir berechnen also die Spur

$$\hat{F}'(\times\times i_3 \cdots i_f) = \varphi'(i_3 \cdots i_f)$$

und werden zeigen, daß *diese aus der entsprechenden Spur φ von $\hat{F}$ durch die Substitution A_{f-2} hervorgeht.* Das schließt die Tatsache ein, daß mit φ auch φ' verschwindet. Bei der Spurbildung in bezug auf $i_1 i_2$ müssen wir in der Summe $\hat{F}'$ dreierlei wesentlich verschiedene Glieder unterscheiden:

$$\begin{aligned}
&\text{a}') \quad \varepsilon(i_1 i_2) \cdot F'_{12}(i_3 \cdots i_f), \\
&\text{b}') \quad \varepsilon(i_1 i_\lambda) \cdot F'_{1\lambda}(i_2 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots i_f) && [\lambda \neq 1, 2], \\
&\text{c}') \quad \varepsilon(i_\lambda i_\mu) \cdot F'_{\lambda\mu}(i_1 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot i_f) && [\lambda \text{ und } \mu \neq 1, 2]
\end{aligned}$$

(in $F'_{\lambda\mu}$ fehlen die Argumente i_λ, i_μ; das soll durch die Striche | angedeutet werden). Die Spurbildung verwandelt a′) in $2n \cdot F'_{12}(i_3 \cdots i\ )$; und dies entsteht in der Tat durch die Substitution A_{f-2} aus der Spur $2n \cdot F_{12}(i_3 \cdots i_f)$ des entsprechenden Gliedes a) in $\hat{F}$. Die Spur von b′)

$$F'_{1\lambda}(i_\lambda i_3 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots i_f)$$

geht aus dem Tensor

$$F_{1\lambda}(i_\lambda i_3 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots i_f)$$

durch die Substitution

$$\| a(i_\lambda i_3 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots; k_\lambda k_3 \cdots k_{\lambda-1} k_{\lambda+1} \cdots) \|$$

hervor. Diese fällt aber wegen der Symmetrieforderung (I) mit

$$A_{f-2} = \| a(i_3 \cdots i_{\lambda-1} i_\lambda i_{\lambda+1} \cdots; k_3 \cdots k_{\lambda-1} k_\lambda k_{\lambda+1} \cdots) \|$$

zusammen. Endlich ist die Spur von c′) gleich

$$\varepsilon(i_\lambda i_\mu) \cdot \varphi'_{\lambda\mu}, \qquad \varphi'_{\lambda\mu} = F'_{\lambda\mu}(\times\times i_3 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot i_f).$$

Zufolge der ersten Gleichung $(f-2)$, die nach Voraussetzung für A_{f-2} gültig ist, geht $\varphi'_{\lambda\mu}$ aus der entsprechenden Spur $\varphi_{\lambda\mu}$ von $F_{\lambda\mu}$ durch die mit A_{f-2} nach den Gleichungen $(f-2)$ verknüpfte Substitution A_{f-4} hervor:

$$\varphi'_{\lambda\mu}(i_3 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot i_f) = \sum_{(k)} a(i_3 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot i_f; k_3 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot k_f) \cdot \varphi_{\lambda\mu}(k_3 \cdot \underset{\lambda}{|} \cdot \underset{\mu}{|} \cdot k_f).$$

Daraus folgt aber

$$\varepsilon(i_\lambda i_\mu) \cdot \varphi'_{\lambda\mu}((i)) = \sum_{(k)} a(i_3 \cdots i_f; k_3 \cdots k_f) \cdot \varepsilon(k_\lambda k_\mu)\, \varphi_{\lambda\mu}((k))$$

zufolge der zweiten Gleichung $(f-2)$.

Damit ist A konstruiert. Wir haben zugleich erkannt, daß die Spur von $\hat{F}$ durch die Abbildung A_{f-2} in die Spur von $\hat{F}'$ übergeht. Zerlegt man einen beliebigen Tensor F gemäß der Gleichung $F = F^* + \hat{F}$ und

bedenkt, daß F^* sich durch die Abbildung A in einen Tensor verwandelt, dessen sämtliche Spuren $= 0$ sind, so kann man allgemein sagen, daß die Spur von F durch die Abbildung A_{f-2} in die Spur von F' übergeht. Die von uns konstruierte Abbildung A hat also folgende Eigenschaften:

1. sie ist symmetrisch;

2. sie fällt innerhalb $\mathfrak{R}_f^*$ mit dem vorgegebenen A^* zusammen;

3. sie transformiert die Spuren der Tensoren gemäß der vorgegebenen Substitution A_{f-2};

4. sie verwandelt den Tensor $\varepsilon(i_1 i_2) \cdot F_{12}(i_3 \cdots i_f)$ so in $\varepsilon(i_1 i_2) \cdot F'_{12}(i_3 \cdots i_f)$, daß F'_{12} aus F_{12} durch A_{f-2} hervorgeht.

Damit ist Satz 3. 3 bewiesen.

Nunmehr sind wir imstande, $\mathfrak{R}_f$ *in invariante irreduzible Bestandteile gegenüber der Algebra* Σ *zu zerlegen.* In (6) durchläuft φ den ganzen Raum $\mathfrak{R}_v^*$. Man zerlegt ihn in seine invarianten irreduziblen Bestandteile gegenüber der Algebra Σ_v^*. Der einzelne Bestandteil wird, wie wir nach § 2 wissen, gebildet von allen Tensoren $e\varphi$, deren Symmetrie durch einen primitiven idempotenten Symmetrieoperator e festgelegt wird. Für

$$\alpha_1, \alpha_{1'}; \cdots; \alpha_r, \alpha_{r'}; \beta_1, \cdots, \beta_v$$

setzen wir der Reihe nach alle „wesentlich verschiedenen" Kombinationen ein [die Kombination bleibt wesentlich ungeändert, wenn man die v Indizes β_j, die Paare $(\alpha_h, \alpha_{h'})$ untereinander und endlich innerhalb einzelner Paare die beiden Glieder vertauscht]. So erhält man eine Reihe von invarianten irreduziblen Teilräumen „der Valenz v", die in irgendeiner Numerierung mit $\mathfrak{P}_\lambda$ $\{\lambda = 1, 2, \cdots\}$ bezeichnet werden mögen. Sie sind aber nicht linear unabhängig voneinander. Indem man sie der Reihe nach durchgeht, kann man ein $\mathfrak{P}_\lambda$ weglassen, wenn es in dem von den vorangegangenen $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_{\lambda-1}$ aufgespannten Teilraum enthalten ist. Im entgegengesetzten Fall ist $\mathfrak{P}_\lambda$ wegen seiner Irreduzibilität von jenem Teilraum linear unabhängig und wird beibehalten. Wählt man nun noch die Valenz v der Reihe nach $= f, f-2, \ldots$, so liefern die beibehaltenen Teilräume eine echte Zerlegung von $\mathfrak{R}_f$ in unabhängige invariante irreduzible Bestandteile.

Satz 3. 4. $\mathfrak{R}_f$ *kann gegenüber der Algebra* Σ *in invariante irreduzible Bestandteile je von einer bestimmten Valenz* $v = f, f-2, \cdots$ *zerlegt werden. Der einzelne Bestandteil enthält alle Tensoren von der Form* (6), $\varphi = e\psi$; e *ist ein primitiver idempotenter Symmetrieoperator in* v *Ziffern, und* ψ *durchläuft alle Tensoren von* $\mathfrak{R}_v^*$.

Daraus folgt mit Hilfe des von mir schon einmal herangezogenen allgemeinen Satzes (6. 2) in GQ, S. 272, daß die Algebra Σ selber voll

reduzibel ist, *jede* ihrer Darstellungen in irreduzible zerfällt, und es keine andern irreduziblen Darstellungen gibt als diejenigen, welche durch die Zerlegung von $\mathfrak{R}_f$ in inäquivalente invariante irreduzible Bestandteile geliefert werden.

Die Beweisführung in diesem Paragraphen, deren Ausgangspunkt die Zerlegung $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_f^* + \hat{\mathfrak{R}}_f$ ist, benutzt den Begriff des Konjugiert-komplexen. Sie gilt darum nur, wenn der zugrunde liegende Zahlbereich ein Körper ist, der aus einem reellen Körper im Sinne von Artin-Schreier [2]) durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ entsteht. Die Sätze selber aber nehmen nirgendwo auf den Begriff des Konjugiert-komplexen Bezug. Es wäre darum erwünscht, daß er auch in den Beweisen vermieden würde. Es ist klar, wie man die Aufgabe anzusetzen hat. Die Zerlegung $F = F^* + \hat{F}$ fordert, daß alle $\frac{f(f-1)}{2}$ Spuren $\varphi_{\alpha\beta}$ von F mit denen von $\hat{F}$ übereinstimmen. Das ergibt für die unbekannten Komponenten der Tensoren $F_{\alpha\beta}$ in (5) lineare Gleichungen, deren rechte Seiten die bekannten Komponenten der Tensoren $\varphi_{\alpha\beta}$ sind; man hat ebensoviele lineare Gleichungen wie Unbekannte. Es scheint aber recht mühsam zu sein, aus diesem verwickelten Gleichungssystem unser Resultat der eindeutigen Existenz eines $\hat{F}$ abzulesen [3]).

Neben den einfachen kann man die *vielfachen Spuren* einführen. Eine dreifache Spur von $F(i_1 i_2 \cdots i_f)$ ist z. B.

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_6)} \varepsilon(i_1 i_2)\,\varepsilon(i_3 i_4)\,\varepsilon(i_5 i_6)\cdot F(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 \cdots i_f) = F(\times\times \bullet\bullet \circ\circ i_7 \cdots i_f).$$

[2]) Abhandlungen aus d. Math. Sem. d. Hamburgischen Univ. 5 (1926), S. 85.

[3]) Bei J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, findet sich auf S. 262—266 — für die orthogonale statt für die Komplexgruppe, wo aber die Verhältnisse ganz analog liegen — ein derartiger direkter Versuch, der die geforderte Zerlegung $F = F^* + \hat{F}$ mit der Youngschen Zerlegung nach Symmetrieeigenschaften verbindet, aber auf S. 265, Z. 12f., ein wesentliches Versehen enthält. Auch spricht das gesperrt gedruckte Theorem auf S. 266 daselbst nicht die entscheidende Tatsache aus, daß in den unzerlegbaren Bestandteilen (siehe Satz 3.4 hier) die Tensoren φ oder ψ alle ihre Spuren gleich Null haben. Das Wort „unzerlegbare Größe" hat bei Herrn Schouten eine mehr formale Bedeutung als der strenge gruppentheoretische Begriff des „Trägers einer irreduziblen Darstellung von I". Darum fehlen bei ihm auch die eigentlichen Irreduzibilitätsbeweise. Ein Hauptbestreben meiner in § 5 zitierten Note *G* in den Göttinger Nachrichten und dieser Arbeit ist die sachgemäße Fassung der Begriffe und Probleme, die hier vorliegen. In einer Richtung scheint freilich das (unbewiesene) Schoutensche Theorem weiterzugehen: die unzerlegbaren Bestandteile φ des willkürlichen Tensors F sollen sich aus F konstruieren lassen allein mittels Permutation, Spurbildung und linearer Kombination. Diese Frage nach dem Algorithmus halte ich für sekundär; sie wird nicht schwer zu beantworten sein, nachdem durch Satz 3.2, 3.4 und 4.2 der Sachverhalt einmal festgestellt ist.

Bedeutet ${}^3\mathfrak{R}_f^*$ den Raum aller Tensoren, deren dreifache Spuren verschwinden, und ${}^3\hat{\mathfrak{R}}_f$ die Gesamtheit der Tensoren, welche sich aus Summanden von der Art

$$\varepsilon(i_1 i_2)\,\varepsilon(i_3 i_4)\,\varepsilon(i_5 i_6)\cdot F_{12,34,56}(i_7,\cdots,i_f)$$

zusammensetzen (die verschiedenen Summanden entstehen, indem irgend drei Paare an Stelle der Paare 12, 34, 56 treten), so gilt wiederum die Zerlegung $\mathfrak{R}_f = {}^3\mathfrak{R}_f^* + {}^3\hat{\mathfrak{R}}_f$.

§ 4.

Die Youngsche Zerlegung nach Symmetrie-Eigenschaften in $\mathfrak{R}_f^*$.

Für die explizite Durchführung wird man als die primitiven idempotenten Symmetrieoperatoren, welche auf die Tensoren $F(i_1\cdots i_f)$ in $\mathfrak{R}_f^*$ wirken, die *Youngschen Operatoren* $\boldsymbol{c}$ verwenden, deren jeder zu einem *Symmetrieschema* gehört, in dessen Felder die Argumente $i_1 i_2\cdots i_f$ oder die Indizes $1, 2, \cdots, f$ eingetragen werden[4]). Der Prozeß besteht in einer Symmetrisierung in bezug auf die Argumente jeder Zeile, gefolgt von einer Alternation in den Spalten. Die zu verschiedenen Schemata gehörigen Operatoren $\boldsymbol{c}$ sind inäquivalent. $\boldsymbol{c}F$ ist für alle Tensoren F gleich 0, wenn das Symmetrieschema mehr als $2n$ Zeilen enthält. Das ist selbstverständlich. Ich behaupte aber, daß bei Beschränkung von F auf den Raum $\mathfrak{R}_f^*$ dies bereits stattfindet, wenn das Schema aus mehr als n Zeilen besteht. Demnach kommen für uns nur Schemata mit höchstens n Zeilen in Betracht. Um das einzusehen, genügt es, die in der ersten Spalte stehenden Argumente ins Auge zu fassen, in bezug auf welche $\boldsymbol{c}F$ schiefsymmetrisch ist. Ich behaupte also:

Satz 4. 1. *Es gibt keinen schiefsymmetrischen Tensor in* $\mathfrak{R}_f^*$ *außer* 0 *von einem Rang f, der größer ist als die halbe Dimensionszahl n.*

Beweis. Von einem schiefsymmetrischen Tensor $F(i_1\cdots i_f)$ interessieren uns nur die Komponenten, deren Argumente $i_1\cdots i_f$ untereinander verschiedene Werte haben, da die andern Komponenten von selber 0 sind. In einer solchen Komponente, z. B.

$$F(1\ 6'\ 4\ 2'\ 1'\ 2\ 5) \qquad [n=6,\ f=7]$$

treten einige Ziffern, hier $1, 1'$ und $2, 2'$, gepaart auf, während andere, hier $4, 5$ und $6'$, als „Einspänner" erscheinen (ohne ihren Partner $4', 5'$, bzw. 6). Diese Komponente ist wegen der schiefen Symmetrie $= \pm F(1\ 1'\ 2\ 2'\ 4\ 5\ 6')$. Ich betrachte nun alle diejenigen Komponenten, in denen gerade $4, 5, 6'$

[4]) Vgl. GQ, S. 315.

und nur diese Ziffern als Einspänner auftreten. Die übrigen Argumente sollen also gepaart vorkommen, ii', und es genügt, i alle Werte durchlaufen zu lassen $\neq 4, 5$ und 6. Allgemeiner: wir nehmen bestimmte h Einspänner an, etwa die Ziffern $n-h+1, \cdots, n$, und betrachten alle Komponenten

$$F(ii'\cdots kk'll', n-h+1, \cdots, n) = G(i, \cdots, k, l), \tag{8}$$

die genau diese h Ziffern als Einspänner aufweisen. Dabei können wir die Anordnung der Argumente so treffen, wie es in (8) geschehen ist. Die Bedingung verschwindender Spur lautet

$$\sum_{l=1}^{n-h} G(i, \cdots, k, l) = 0. \tag{9}$$

$G(i, \cdots, k, l)$ hängt symmetrisch von seinen μ Argumenten ab, welche die Ziffern von 1 bis $n-h$ durchlaufen ($2\mu = f-h > n-h$). Wenn zwei der Argumente gleich werden, ist $G=0$. Von jetzt ab werde n statt $n-h$ geschrieben; alle Argumente variieren nur in dem Spielraum $1, 2, \cdots, n$.

Ich setze

$$\mathfrak{g}(a, b, \cdots) = G(i, \cdots, k, l), \tag{10}$$

wenn $a, b, \cdots; i, \cdots, k, l$ irgendeine Permutation der n Ziffern ist. $\mathfrak{g}$ hängt gleichfalls nur von der „Kombination" der m Ziffern $a, b, \cdots$ ab; $m = n-\mu$. In der Summe (9) können diejenigen l ausgelassen werden, die mit einem der $\mu-1$ verschiedenen Argumentwerte $i, \cdots, k$ zusammenfallen. Sind $a, b, \cdots, c$ die $m+1$ Ziffern, welche $i, \cdots, k$ zur vollen Reihe $1, 2, \cdots, n$ auffüllen, so lautet die Gleichung (9) nach der Übersetzung (10) so:

$$\sum_{(a, b, \cdots, c)} \mathfrak{g}(a', b', \cdots) = 0.$$

Hier durchläuft $(a', b', \cdots)$ alle Kombinationen zu m, welche aus den $m+1$ Ziffern $a, b, \cdots, c$ gebildet werden können. Da $\mu > \frac{n}{2}$ vorausgesetzt war, ist $m < \frac{n}{2}$. Der Satz 4. 1 geht in die Behauptung über: $2m$ sei $< n$. $\mathfrak{g}(a, b, \cdots)$ hänge von den Kombinationen $(a, b, \cdots)$ zu m ab, die sich aus den Ziffern $1, 2, \cdots, n$ bilden lassen. Ergibt die Summe $\sum \mathfrak{g}(a, b, \cdots)$ immer 0, wenn sie erstreckt wird über die Kombinationen zu m, die sich aus irgend $m+1$ dieser Ziffern bilden lassen, so sind alle Zahlen $\mathfrak{g}(a, b, \cdots)$ einzeln $= 0$.

Wenn man das homogene Polynom

$$P_m(z_1, \cdots, z_n) = \sum \mathfrak{g}(a, b, \cdots) z_a z_b \cdots$$

der n Variablen $z_1, \cdots, z_n$ einführt, das vom Grade m ist, so kann man die Behauptung auch so formulieren:

P_m sei ein homogenes Polynom der n Variablen z_i von einem Grade $m < \frac{n}{2}$. Aus

$$(z_1 + \cdots + z_n) \cdot P_m \equiv 0 \qquad (\text{modd. } z_1^2, z_2^2, \cdots, z_n^2)$$

folgt, daß P_m selbst $\equiv 0$ ist nach dem gleichen Modul.

Für den Beweis ist eine etwas allgemeinere Fassung zweckmäßig.

Hilfssatz $\mathfrak{H}(m, M, n)$. *Es sei* $m \leqq M \leqq n - m$; *wenn die Summe* $\sum \mathfrak{g}(a, b, \cdots)$ *immer* 0 *ist, falls sie über alle Kombinationen zu* m *erstreckt wird, die sich aus irgend* M *Ziffern der Reihe* $1, 2, \cdots, n$ *bilden lassen, so sind die* $\mathfrak{g}(a, b, \cdots)$ *einzeln* $= 0$.

Wir setzen zunächst nur voraus:

$$m \geqq 1, \qquad M \leqq n - 1. \tag{11}$$

$a, b, \cdots, c$ seien M verschiedene der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ und die Summe

$$\sum_{(a, b, \cdots, c)} \mathfrak{g}(a', b' \cdots), \tag{12}$$

erstreckt über alle Kombinationen $(a' b' \cdots)$ zu m der M Ziffern $a, b, \cdots, c$ heiße einen Augenblick $g(a, b, \cdots, c)$. (Ihr Verschwinden ist die Voraussetzung unseres Satzes.) Wir nehmen eine weitere Ziffer d hinzu und summieren die sämtlichen Ausdrücke, die aus $g(a, b, \cdots, c)$ dadurch hervorgehen, daß man an Stelle von $a\,b \cdots c$ eine der $M + 1$ Kombinationen setzt, die durch Streichen einer Ziffer aus $a\,b \cdots c\,d$ entstehen. Dadurch bekommt man offenbar die Summe

$$(M - m + 1) \cdot \sum_{(a\,b \cdots c\,d)} \mathfrak{g}(a' b' \cdots), \tag{13}$$

erstreckt über alle Kombinationen $(a' b' \cdots)$ zu m der $M + 1$ Ziffern $a\,b \cdots c\,d$. Subtrahiere (12) von der des Faktors $M - m + 1$ beraubten Gleichung (13)! Es folgt

$$\sum_{(a\,b \cdots c\,d)} \mathfrak{g}(a' b' \cdots d) = 0;$$

die Summe erstreckt sich über alle Kombinationen $a' b' \cdots d$ zu m aus der Reihe $a\,b \cdots c\,d$, *in denen* d *vorkommt*. Das ist durch das letzte Argument d zum Ausdruck gebracht. Von jetzt ab sei d eine fest gewählte Ziffer. Setzt man

$$\mathfrak{g}(a' b' \cdots d) = \mathfrak{g}_1(a' b' \cdots),$$

so hat man demnach

$$\sum_{(a\,b \cdots c)} \mathfrak{g}_1(a' b' \cdots) = 0,$$

wenn $a' b' \cdots$ alle Kombinationen zu $m - 1$ der M Ziffern $(a\,b \cdots c)$ durchläuft. Aus der Ziffernreihe von 1 bis n ist d zu streichen; für $(a\,b \cdots c)$

kann irgendeine Kombination der $n-1$ übrig bleibenden Ziffern eintreten. Satz $\mathfrak{H}(m, M, n)$ ist damit zurückgeführt auf $\mathfrak{H}(m-1, M, n-1)$. Dies gelang allein auf Grund der Voraussetzung (11). Unter der Annahme $M \leqq n-m$ kann daher die Induktionskette zurückgeleitet werden bis auf den Fall $\mathfrak{H}(0, M, n-m)$, wo nichts zu beweisen bleibt.

Der volle Inhalt des Hilfssatzes $\mathfrak{H}(m, M, n)$ ist bereits in $\mathfrak{H}(m, n-m, n)$ enthalten. Er liefert, über Satz 4. 1 hinausgehend, das Resultat: *Damit ein schiefsymmetrischer Tensor $F(i_1 \cdots i_f)$ verschwindet, genügt es, daß alle seine $(f-n)$-fachen Spuren verschwinden* $(n < f \leqq 2n)$. — Über den zugrunde gelegten Zahlbereich braucht nichts anderes vorausgesetzt zu werden, als daß er keine Primzahl $\leqq n$ zur Charakteristik hat. Denn beim Beweise des Hilfssatzes $\mathfrak{H}(m, M, n)$ werden lediglich Faktoren

$$M-m+1, \cdots, \quad M-1, \quad M,$$

also Teiler von $M!$ „gekürzt".

Auf Grund der Zerlegung $\mathfrak{R}_f = {}^r\mathfrak{R}_f^* + {}^r\hat{\mathfrak{R}}_f$ $(r = f-n)$, wie sie am Schlusse von § 3 angegeben wurde, schließt man, daß der schiefsymmetrische Tensor $F(i_1 \cdots i_f)$ vom Range $f > n$ sich in der Form schreiben lassen muß

$$(14) \qquad F(i_1 i_2 \cdots i_f) = \sum \pm \varepsilon(i_{\alpha_1} i_{\alpha_{1'}}) \cdots \varepsilon(i_{\alpha_r} i_{\alpha_{r'}}) F'(i_{\beta_1} \cdots i_{\beta_v});$$

die Summe erstreckt sich alternierend über alle Permutationen

$$\alpha_1, \alpha_{1'}, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r'}; \ \beta_1, \cdots, \beta_v$$

der Ziffern $1, 2, \cdots, f$. $F'(i_1 \cdots i_v)$ kann von vornherein als ein schiefsymmetrischer Tensor angenommen werden. v ist $= f-2r$, also $r+v=n$. Das läßt sich aber vermittels der simplen kombinatorischen Überlegungen dieses Paragraphen auch direkt einsehen, ganz unabhängig von dem Begriff des Konjugiert-komplexen und den damit verbundenen Einschränkungen. Wenn $i_1 i_2 \cdots i_f$ lauter verschiedene Werte haben, ist die Zahl der gepaart auftretenden Argumente mindestens $2r$, die Zahl der Einspänner also höchstens v. Fassen wir wiederum diejenigen Komponenten allein ins Auge, die bestimmte h Einspänner besitzen $(h = v, v-2, \cdots)$, etwa die Ziffern $n-h+1, \cdots, n$, und führen eine zu (8) analoge Bezeichnung ein, so lautet die zu beweisende Gleichung (14):

$$(15) \qquad G(i, k, \cdots, l) = \sum G'(i', \cdots, k').$$

Die Zahl der Argumente in G' ist $m = \frac{v-h}{2}$, die Zahl der Argumente in G gleich $M = r+m$; $M+m = r+v-h = n-h$. Die Argumente durchlaufen nur die Ziffern von 1 bis $n-h$. Schreiben wir jetzt wieder n an Stelle von $n-h$, so erstreckt sich die Summe über alle *Kombinationen* $(i' \cdots k')$ zu m, die sich aus den $n-m$ verschiedenen Ziffern $i, k, \cdots, l$

bilden lassen. Die Zahl aller Kombinationen $(i' \cdots k')$ zu m aus der Reihe $1, 2, \cdots, n$ ist die gleiche wie die aller Kombinationen $(i, k, \cdots, l)$ zu $n - m$, nämlich $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. (15) ist darum ein System linearer Gleichungen von ebenso vielen Gleichungen wie Unbekannten. Es ist eindeutig lösbar, da die zugehörigen homogenen Gleichungen nach dem Hilfssatz $\mathfrak{H}(m, n-m, n)$ keine Lösung außer 0 besitzen.

Man kann die Möglichkeit der Darstellung (14) auch folgendermaßen erkennen. Wird

$$\Phi(\iota_1 \cdots \iota_g) = F(i_1 \cdots i_f) \tag{16}$$

gesetzt, falls $i_1 \cdots i_f$, $\iota_1 \cdots \iota_g$ irgendeine gerade Permutation der Ziffern $1, 1', \cdots, n, n'$ ist, so wird dadurch ein mit dem kovarianten schiefsymmetrischen Tensor F verbundener kontravarianter Φ vom Range $g = n - r$ eingeführt. „Symbolisch" kann man ihn durch g willkürliche kontravariante Vektoren $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(g)}$ in der Gestalt

$$\Phi(\iota_1 \cdots \iota_g) \sim \begin{matrix} \eta_{\iota_1}^{(1)} & \cdots & \eta_{\iota_g}^{(1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_{\iota_1}^{(g)} & \cdots & \eta_{\iota_g}^{(g)} \end{matrix}$$

ausdrücken. Dann wird

$$\sum_{(i)} F(i_1 \cdots i_f)\, \xi_{i_1}^{(1)} \cdots \xi_{i_f}^{(f)} = \det(\xi^{(1)} \cdots \xi^{(f)} \eta^{(1)} \cdots \eta^{(g)}).$$

Bezeichnen wir einen Augenblick die $2n$ Vektoren ξ und η ohne Unterschied mit $\zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(2n)}$, so ist nach einer bekannten Formel die Determinante $(\zeta^{(1)} \zeta^{(2)} \cdots \zeta^{(2n)})$ gleich der alternierend über die Permutationen der $2n$ Vektoren zu erstreckenden Summe („Pfaffsches Aggregat")

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \sum \pm [\zeta^{(1)} \zeta^{(2)}] \cdots [\zeta^{(2n-1)} \zeta^{(2n)}].$$

In jedem Glied der Summe können höchstens g der $[\,]$-Faktoren einen Vektor η enthalten, es bleiben also mindestens $n - g = r$ reine ξ-Faktoren übrig. Das ergibt von neuem die Gleichung (14), zugleich mit einem bequemen symbolischen Ausdruck für den Tensor F'. —

Als das eigentlich weiterführende Ergebnis dieses Paragraphen notieren wir den

Satz 4.2. *In Satz 3.4 können als Symmetrieoperatoren e die Youngschen Operatoren verwendet werden, deren Schema nicht mehr als n Zeilen enthält.*

§ 5.

Die einhüllende Algebra der von der Komplexgruppe im Tensorraum induzierten Gruppe.

Gelingt es, auf direktem Wege einzusehen, daß Σ die einhüllende Algebra der im Tensorraum von der Komplexgruppe Γ induzierten Gruppe Γ_f ist, so ist mit dem Vorstehenden zugleich eine elementare Ableitung der rationalen Darstellungen von Γ gewonnen. Ich verfahre hier umgekehrt, indem ich aus den bekannten Tatsachen über die Darstellungen von Γ die grundlegenden Sätze 1.1 und 1.2 beweise.

Ein Symmetrieschema $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ aus höchstens n Zeilen liege vor; die ganzen Zahlen m_i geben die Zeilenlängen an:

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 0. \tag{17}$$

Die Summe $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ sei $= f$, $\varphi(i_1 i_2 \cdots i_f)$ ein beliebiger Tensor des Raumes $\mathfrak{R}_f^*$ und c der auf solche Tensoren wirkende, unserm Symmetrieschema zugehörige Youngsche Operator. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_c$ aller Tensoren von der Gestalt $c\varphi$ (φ durchläuft ganz $\mathfrak{R}_f^*$) ist das Substrat einer bestimmten Darstellung $(\mathfrak{F}_c) = \mathfrak{H}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ von Γ. Man weiß: 1. $(\mathfrak{F}_c)$ *ist irreduzibel, und* 2. *verschiedenen Symmetrieschemen entspringen auf diese Weise inäquivalente Darstellungen* $(\mathfrak{F}_c)$. Auf den Beweis komme ich sogleich mit ein paar Worten zurück.

Wir hatten aber $\mathfrak{R}_f$ in §§ 3 und 4 gemäß den Sätzen 3.4 und 4.2 in invariante irreduzible Teilräume $\mathfrak{P}_\lambda$ zerlegt gegenüber der Algebra Σ und entnehmen dem eben Gesagten: Die $\mathfrak{P}_\lambda$ bleiben irreduzibel, und zwei inäquivalente $\mathfrak{P}_\lambda$ bleiben inäquivalent, wenn wir uns innerhalb der Algebra Σ auf die Gruppe Γ_f beschränken. Die vorkommenden inäquivalenten irreduziblen $\mathfrak{P}_\lambda$ mögen einen Augenblick $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \cdots$ heißen, die Dimensionalität dieser Tensorräume $N_1, N_2, \cdots$. Nach dem bekannten Satz von Burnside-Frobenius-Schur ist dann die Γ_f einhüllende Algebra $\{\Gamma_f\}$ eine lineare Mannigfaltigkeit von

$$N_1^2 + N_2^2 + \cdots$$

Dimensionen. Das gleiche gilt für Σ. *Infolgedessen erschöpft die in* Σ *enthaltene lineare Mannigfaltigkeit* $\{\Gamma_f\}$ *ganz* Σ.

Wer sich auf das Theorem von Burnside-Frobenius-Schur beruft, muß freilich den zugrunde liegenden *Zahlbereich als algebraisch abgeschlossen* voraussetzen. Unsere Überlegung führt demnach zum Ziel, wenn der zugrunde liegende Bereich aus einem reellen, reell abgeschlossenen Körper durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ entsteht.

Übrigens bekommen wir hier eine Art explizite Formel für die Dimensionszahl der linearen Mannigfaltigkeiten Σ^* und Σ. Der Grad

$N(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ der Darstellung $\mathfrak{H}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ ist von mir in Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 342 (freilich auf transzendentem Wege) bestimmt worden. Wird

$$l_1 = m_1 + n,\ l_2 = m_2 + (n-1), \cdots, l_n = m_n + 1$$

und

$$\prod_{i=1}^{n} l_i \cdot \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k) = \Delta(l_1, l_2, \cdots, l_n)$$

gesetzt, so ist

$$N(m_1, m_2, \cdots, m_n) = \frac{\Delta(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\Delta(n, n-1, \cdots, 1)}.$$

Die Dimensionszahl von Σ^* ist gleich der Summe

$$\sum N^2(m_1, m_2, \cdots, m_n),$$

erstreckt über alle ganze Zahlen m_i, die den Ungleichungen (17) genügen und die Summe f ergeben; die Dimensionszahl von Σ erhält man, wenn man m_i alle denselben Ungleichungen genügenden ganzen Zahlen durchlaufen läßt, deren Summe $= f$ oder $f-2$ oder $f-4, \cdots$ ist.

Den Beweis für die oben benutzten Tatsachen, die Irreduzibilität und Inäquivalenz der Darstellungen von Γ betreffend, muß man sich aus meinen Arbeiten **Z**: Über die Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen I, II (Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 271 und **24** (1926), S. 328) und einer Note **G** in den Göttinger Nachrichten 1926, S. 235, zusammensuchen. Ein transzendentes Element, das dabei zum Beweise der vollen Reduzibilität in **Z** benutzt wird, kann ebenso wie in **G**, S. 237 f., vermieden werden. Mit dieser Abänderung rekapituliere ich hier den Gedankengang. Wenn $x, y, \cdots$ Vektoren des zugrunde liegenden Vektorraumes $\mathfrak{R}$ sind, so bezeichne z. B. $x\,y\,z$ den Tensor 3. Stufe mit den Komponenten

$$F(i, k, l) = x_i y_k z_l,$$

$(x \times y \times z)$ aber den Tensor $\sum \pm x\,y\,z$ (alternierende Summe über die Vertauschungen der drei Vektoren x, y, z). Die im Vektorraum verwendeten Koordinaten x_i stützen sich auf ein Koordinatensystem, das aus den Grundvektoren $e_1, e_{1'}, \cdots, e_n, e_{n'}$ besteht. Mehrere Vektoren heißen konjugiert, wenn die aus irgend zwei von ihnen gebildeten schiefen Produkte verschwinden. $p_1, p_2, \cdots, p_n$ seien nicht-negative ganze Zahlen und E der Tensor

$$e_1^{p_1}(e_1 \times e_2)^{p_2}(e_1 \times e_2 \times e_3)^{p_3} \cdots.$$

Es wird zunächst behauptet, daß alle Tensoren, welche aus E durch die Operationen der Gruppe Γ_f hervorgehen, gerade den linearen Tensorraum $\mathfrak{T}_c$ aufspannen, welcher das Substrat der Darstellung $\mathfrak{H}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ ist; dabei ist

$$m_1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_n,\ m_2 = p_2 + \cdots + p_n, \cdots, m_n = p_n$$

zu setzen. Aus E entsteht durch die Operationen von Γ_f jeder Tensor der Form

$$x^{p_1}(x \times y)^{p_2}(x \times y \times z)^{p_3} \cdots, \tag{18}$$

wo $x, y, z, \cdots$ beliebige zueinander konjugierte Vektoren sind. Das aus Zeilen von der Länge $m_1, m_2, \cdots$ bestehende Schema der Tensorargumente werde abgekürzt durch einen Buchstaben

$$J = \begin{Bmatrix} i_1\, i_2\, i_3 \cdots \\ k_1\, k_2 \cdots \\ \cdots\cdots \end{Bmatrix}$$

benannt. Es gilt dann einzusehen: (H) Der allgemeinste zu $\mathfrak{R}_f^*$ gehörige Tensor φ_J, der symmetrisch ist in den Argumenten jeder Zeile, setzt sich linear aus den speziellen Tensoren

$$\varphi_J = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots y_{k_1} y_{k_2} \cdots \cdots$$

zusammen ($x, y, \cdots$ beliebige konjugierte Vektoren). Denn (18) entsteht durch Alternation in bezug auf die Spalten aus diesem Tensor φ_J. Der in G erbrachte Beweis von (H) — der zugleich ein Stück des Satzes 3.2 mitliefert — ist wohl der am wenigsten triviale Schritt zur Gewinnung des Hauptsatzes 1.2. Der Charakter der Darstellung $\mathfrak{H}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ für die in Γ enthaltenen Hauptelemente von der Gestalt

$$x_i \to \alpha_i x_i \left(\alpha_{1'} = \frac{1}{\alpha_1},\ \alpha_{2'} = \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\right) \tag{19}$$

ist ein „Polynom“ in $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ mit ganzzahligen nicht-negativen Koeffizienten, dessen höchstes Glied

$$\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_n^{m_n} \tag{20}$$

ist und mit dem Koeffizienten 1 auftritt. („Polynom“ wird hier in dem modifizierten Sinne gebraucht, daß die Exponenten auch negative ganze Zahlen sein können!) Zum Beweise sondert man in (18) die Teile verschiedenen „Gewichts“ voneinander, die sich je mit einem bestimmten Potenzprodukt von $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ multiplizieren bei der allgemeinen Haupttransformation (19). Daraus geht sogleich hervor, daß zwei zu verschiedenen Symmetrieschemen gehörige Darstellungen $\mathfrak{H}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ inäquivalent sind.

Es bleibt zu zeigen, daß die von den Transformierten von E aufgespannte Tensormannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ irreduzibel ist gegenüber Γ_f. Beweis indirekt: Angenommen, $\mathfrak{F}'$ sei eine gegenüber Γ invariante Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}''$ sei innerhalb $\mathfrak{F}$ diejenige Tensormannigfaltigkeit, welche im Sinne der zu Beginn von § 3 eingeführten unitären Maßbestimmung senkrecht zu $\mathfrak{F}'$ ist, so daß die Zerlegung besteht: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''$.

$\mathfrak{F}''$ ist alsdann invariant gegenüber allen *unitären* Operationen der Gruppe Γ, und daraus schließt man in bekannter Weise (mit Hilfe der infinitesimalen Gruppenoperationen), daß $\mathfrak{F}''$ invariant ist gegenüber *ganz* Γ.[5]) In $\mathfrak{F}'$ oder $\mathfrak{F}''$ muß ein Tensor vorkommen, der bei additiver Zerlegung in Bestandteile verschiedenen Gewichtes den Tensor E vom Gewichte (20) enthält. Daher kommt E selbst in $\mathfrak{F}'$ oder $\mathfrak{F}''$ vor und damit auch alle aus E durch die Operationen von Γ_f entstehenden Tensoren, d. h. $\mathfrak{F}'$ oder $\mathfrak{F}''$ fällt mit ganz $\mathfrak{F}$ zusammen.

§ 6.

Schlußbemerkungen, insbesondere über die Drehungsgruppe.

Der eigentliche Zweck unserer Untersuchung liegt weniger in den in Form von Sätzen festgenagelten Einzelresultaten als darin, den Darstellungsmechanismus, dessen Wirkung wir mit mehr oder weniger transzendenten Mitteln zum Teil bis zu einem erstaunlichen Grade vorauswissen, von innen heraus elementar zu verstehen. Nachdem die obwaltenden Verhältnisse, wenigstens wenn das Kontinuum der komplexen Zahlen als Zahlbereich zugrunde gelegt wird, vollständig geklärt sind, ist es vor allem erwünscht, die Frage zu entscheiden, und zwar, wenn möglich, durch eine direkte Konstruktion positiv zu entscheiden, ob die Gültigkeit von Satz 1.2 von der algebraischen Abgeschlossenheit des Zahlbereichs wie auch vom Begriff des Konjugiert-komplexen unabhängig ist. In zweiter Linie wäre der Beweis der Zerlegung, Satz 3.2, ohne Heranziehung des Konjugiert-komplexen zu führen. Erst dann wäre ein elementar ganz durchsichtiger Zugang zu den Darstellungen der Komplexgruppe gewonnen.

Die *Drehungsgruppe* Γ in $2n$ oder $2n+1$ Dimensionen läßt sich analog behandeln. An Stelle von $\|\varepsilon(ik)\|$ tritt die Einheitsmatrix $\|\delta(ik)\|$. Die Sätze von §§ 3 und 4 sind unverändert gültig. Die zugehörigen Algebren Σ^* und Σ mögen auch hier ein der Untersuchung würdiges Objekt sein — aber sie sind *nicht* die einhüllenden Algebren der im Tensorraum $\mathfrak{R}_f^*$, bzw. $\mathfrak{R}_f$ von Γ induzierten Gruppen. Dies liegt daran, daß Satz 4.1 im orthogonalen Gebiet versagt. Denn selbstverständlich ist für jeden schiefsymmetrischen Tensor $F(i_1 i_2 \cdots i_f)$ die Spur

$$\sum_r F(r r i_3 \cdots i_f) = 0;$$

aus dem Verschwinden der Spur kann unmöglich auf $f \leqq n$ geschlossen werden. Um den Tensorraum $\mathfrak{R}_f$ in die Teilräume von der Art $\mathfrak{F}_c$ zu zer-

[5]) Vielleicht aber ist es zweckmäßiger, der Untersuchung von vornherein statt der Gruppe Γ den unitären Ausschnitt von Γ zugrunde zu legen; die Sätze 1.1 und 1.2 werden dadurch nur inhaltsreicher.

legen, welche den Symmetrieschemen *mit höchstens n Zeilen* zugehörig sind und in denen Γ *irreduzible* Darstellungen induziert, benötigten wir im Falle der Komplexgruppe nur zwei Operationen: A) die Vertauschungen s der Tensorargumente und B) die Zerspaltung $F = F^* + \hat{F}$, von welcher Satz 3.2 handelt. Damit reichen wir hier nicht aus. Das hängt nach dem Schluß von § 4 eng damit zusammen, daß sich nicht die Determinante von $2n$ bzw. $2n+1$ Vektoren ganz rational durch ihre skalaren Produkte ausdrücken läßt, sondern erst das Quadrat der Determinante. Ist $F(i_1 \cdots i_f)$ ein schiefsymmetrischer Tensor von $f > n$ Argumenten, $f = n + r$, so wird durch die Gleichung (16) damit ein kontravarianter Tensor Φ vom Range $g = n - r$ bzw. $n + 1 - r$ verbunden. Gegenüber orthogonalen Substitutionen ist aber ein kontravarianter Vektor oder Tensor das gleiche wie ein kovarianter. Und dieser Übergang von F zu Φ ist der dritte Prozeß C), der zu A) und B) hinzutreten muß, um die volle Reduktion des Tensorraumes $\mathfrak{R}_f$ für die orthogonale Gruppe durchführen zu können. Welche Wirkung das auf die Definition der einhüllenden Algebra von Γ_f hat, soll hier nicht mehr untersucht werden.

(Eingegangen am 1. Januar 1932.)

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von der Schriftleitung der „Naturwissenschaften". (Bezieher der „Naturwissenschaften" erhalten die „Ergebnisse" zu einem um 10% ermäßigten Vorzugspreis.)

Band X. Mit 118 Abbildungen. III, 452 Seiten. 1931.
RM 36.—; gebunden RM 37.60

Inhaltsverzeichnis:

Die veränderlichen Sterne. Von Privatdozent Dr. Paul ten Bruggencate, Greifswald.

Interferometer Methods in Astronomy. Von Professor Dr. F. G. Pease, Pasadena (Kalifornien).

Die neue Feldtheorie Einsteins. Von Privatdozent Dr. C. Lanczos, Frankfurt a. M., z. Z. Lafayette (Indiana).

Die dynamische Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen in neuer Form. Von Professor Dr. Max von Laue, Berlin.

Kerr-Effekt, Lichtzerstreuung und Molekülbau. Von Dr. H. A. Stuart, Königsberg, z. Z. Berkeley (Kalifornien).

Die Prädissoziation und verwandte Erscheinungen. Von Privatdozent Dr. G. Herzberg, Darmstadt.

Die Lichtausbeute bei Stoßanregung. Von Professor Dr. W. Hanle, Jena, und Dr. K. Larché, Jena.

Röntgenforschung in der Metallkunde. Von Privatdozent Dr. U. Dehlinger, Stuttgart.

Chemische Bindung und Quantenmechanik. Von Prof. Dr. M. Born, Göttingen.

Einführung in die Wellenmechanik

Von Dr. **J. Frenkel,** Professor für Theoretische Physik am Polytechnischen Institut in Leningrad. Mit 10 Abbildungen. VIII, 317 Seiten. 1929. RM 26.—; geb. RM 27.60 *

Das vorliegende Buch ist eine hauptsächlich die Wellenauffassung der Quantenmechanik verwendende vorzügliche Einführung in die elementare Quantenmechanik. Nach einer breiten und anschaulichen Darlegung der Grundbegriffe der Wellenmechanik, die sowohl das historische Entstehen der Planck-Einstein-Bohrschen Gedanken wie auch die wellenoptisch-mechanische Begründung der neuen Mechanik durch de Broglie-Schrödinger sowie die wichtige prinzipielle Erkenntnis der Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelationen berücksichtigt (Kapitel 1 und Teile des Kapitels 2), werden die Schrödingerschen Gleichungen für das Ein- und Mehrelektronenproblem abgeleitet. Dann wird die Diracsche relativistische Elektronengleichung besprochen. Diese Gleichung wird auf einem neuen, Verbindungen mit der elektromagnetischen Lichttheorie herstellenden Wege gewonnen. Im Kapitel 3 wird der Zusammenhang mit der Matrizentheorie hergestellt und Anwendungen auf die prinzipiell höchst wichtigen Probleme der Lichtemission und der Resonanz von Mehrelektronensystemen gegeben. Das Kapitel 4 gibt Anwendungen auf die wichtigsten speziellen Probleme: Wasserstoffatom, wasserstoffähnliche Spektren, Comptoneffekt.
Die Naturwissenschaften.

Atomtheorie und Naturbeschreibung

Vier Aufsätze mit einer einleitenden Übersicht. Von **Niels Bohr.** IV, 77 Seiten. 1931. RM 5.60

Inhaltsverzeichnis: Einleitende Übersicht 1929 mit Addendum 1931. I. Atomtheorie und Mechanik 1925. II. Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik 1927. III. Wirkungsquantum und Naturbeschreibung 1929. IV. Die Atomtheorie und die Prinzipien der Naturbeschreibung 1929.

Die Relativitätstheorie

Dargestellt von Dr. **Ludwig Hopf,** Professor an der Technischen Hochschule Aachen. (Band XIV der „Verständlichen Wissenschaft".) Mit 30 Abbildungen. VIII, 148 Seiten. 1931. Gebunden RM 4.80

Nur selten haben Gedankengänge, die aus der Physik erwachsen sind, so allgemeines Interesse gefunden und so revolutionierend auf das naturwissenschaftliche und philosophische Denken der ganzen Generation gewirkt, wie die Ideenwelt der Relativitätstheorie, die im wesentlichen das Werk Albert Einsteins ist. Es wird daher lebhaft begrüßt werden, daß Professor Hopf im Rahmen der „Verständlichen Wissenschaft" einen Band über die Relativitätstheorie geschrieben hat, der die Grundgedanken der Theorie in klarer und verständlicher Form entwickelt und sie so allen naturwissenschaftlich Interessierten nahebringt.

* *Auf die vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.*

Strahlenoptik

Von

Dr. M. Herzberger

Wissenschaftlichem Mitarbeiter bei Carl Zeiss in Jena

Mit 60 Abbildungen. XIII, 196 Seiten. 1931

RM 18.—; gebunden RM 19.40

Band XXXV der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften"

Aus dem Vorwort:

Das vorliegende Buch versucht, im Geiste W. R. Hamiltons die geometrische Optik in ihrem heutigen Bestand aus *einem* Grundgesetz, einer Umformung des Fermatschen Prinzipes, einheitlich aufzubauen. Um zu zeigen, daß die hier angewandten Methoden auch für andere Variationsprobleme sich nützlich erweisen können, werden im ersten Teil, angeregt durch Arbeiten von C. Carathéodory, die Grundgesetze auch in anisotropen und inhomogenen Mitteln behandelt. Im zweiten Teil findet man eine Darstellung der Gesetze erster Ordnung, in dem u. a. die Ergebnisse A. Gullstrands neu abgeleitet werden; hier wird insbesondere darauf geachtet, den oft verwischten Unterschied deutlich aufzuzeigen zwischen den Eigenschaften der optischen Abbildung in der Nähe einer Rotationsachse und den Eigenschaften einer kollinearen Abbildung mit in der Grenze gleichen Eigenschaften. Die Theorie der Strahlenbegrenzung nach Abbe und M. von Rohr geht hier auch weiter als üblich, und es wird auf die Grenzen ihrer Gültigkeit hingewiesen. Die Seidelschen Bildfehler werden sowohl in ihrer Abhängigkeit von der Blendenlage, als auch — wohl zum erstenmal — in ihrer Abhängigkeit von der Objektlage eingehend behandelt; dies Kapitel wird sicher auch dem reinen Praktiker etwas bieten, da hier u. a. die Grenzen der Forderungen angegeben werden, die man an optische Systeme stellen darf. Der vorletzte Teil beschäftigt sich mit den Abbildungsgesetzen bei endlicher Öffnung und endlicher Apertur, insbesondere mit der Abbeschen Sinusbedingung und ihren Erweiterungen.

In diesem und dem letzten Teil, der besondere, ausgezeichnete Abbildungen des ganzen Strahlenraums behandelt, sind insbesondere Untersuchungen verarbeitet, die der Verfasser gemeinsam mit H. Boegehold in den letzten Jahren veröffentlichte.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Printed in Germany.